Title	Hoffmanパズルの解の列挙と一般化に関する研究
Author(s)	後藤，新
Citation	
Issue Date	2011-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/9624
Rights	
Description	Supervisor:上原隆平，情報科学研究科，修士

修 士 論 文

Hoffman パズルの解の列挙と一般化に関する研究

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報科学専攻

後藤 新

2011 年 3 月

修 士 論 文

Hoffman パズルの解の列挙と一般化に関する研究

指導教官　上原隆平 准教授

審査委員主査　上原隆平 准教授
審査委員　浅野哲夫 教授
審査委員　平石邦彦 教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科 情報科学専攻

0810024 後藤 新

提出年月: 2011 年 2 月

概 要

パッキング問題は複数の物体を容器に詰め込む問題である．一般のパッキング問題はNP 困難問題の一つとして知られており，あらゆる場合において効率的に詰め込む万能なアルゴリズムは知られていない．パッキング問題の特殊な例として Hoffman パズルが挙げられる．

本研究では，Hoffman パズルに対して計算機による解析を行い，Hoffman パズルの解の総数と具体的な解を求めた．次に，Hoffman パズルを一般化した Hoffman-Knuth パズルを考え，Hoffman-Knuth パズルの解と解を持つピースの個数の上界を証明及び計算機による解析により明確にした。また，Hoffman-Knuth パズルが解を持つ条件を明確にした．

目次

図 目 次

第1章　はじめに

1.1　研究の背景

実社会において物を詰め込むという行為はなくてはならない行為である．例としては大きさが決まっているコンテナやトラックに効率的に荷物を積み込むことなどが挙げられる．容積が大きいほうがたくさんの荷物を詰め込むことができる．しかし，実社会では容積が制限されている場合が多い．制限された容積でより多くの荷物を積込むことが求められる．このような問題はパッキング問題と呼ばれている．

パッキング問題は複数の物体を容器に詰め込む問題である．一般のパッキング問題はNP 困難問題の一つとして知られており，あらゆる場合において効率的に詰め込む万能なアルゴリズムは知られていない．パッキング問題の特殊な例として Hoffman パズルが挙げられる．

1.2　研究の目的

本研究では，まず Hoffman パズルに対して計算機による解析を行い，Hoffman パズルの解の総数と実際の解を求めた．次に，Hoffman パズルから Hoffman-Knuth パズルへの一般化を考え，Hoffman-Knuth パズルが解を持つピースの個数の上界と具体的な解を見つけることを目的とした．また，Hoffman-Knuth パズルが解を持つための条件も明らかにする．

1.3　本論文の流れ

本稿では，第 2 章で Hoffman パズルについて述べる．第 3 章で Hoffman パズルの解の列挙について述べる．第 4 章で Hoffman パズルの一般化である Hoffman-Knuth パズルについて述べる．第 5 章で Hoffman-Knuth パズルの解が成立しない個数の証明と解の列挙について述べる．

第2章　Hoffmanパズル

2.1　Hoffmanパズル

Hoffman パズルは 1978 年に Hoffman が発表した詰め込みパズルである [1]．長さの異なる 3 辺 a, b, c を持つ 27 個の同型の直方体のピースを 1 辺 $a+b+c$ の立方体の箱に詰め込むことが目的である．ただし，a, b, c は条件

$$\frac{1}{4}(a+b+c) < a < b < c$$

を満たす．この条件を **Hoffman の条件**と呼ぶ．1981 年には Conway と Cutler が Hoffman パズルの解の数が 21 個であることを示した．図 2.1 と図 2.2 に Hoffman パズルを示す．

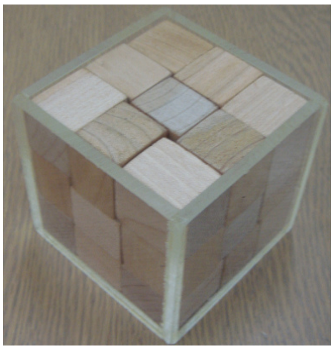


図 2.1: Hoffman パズル

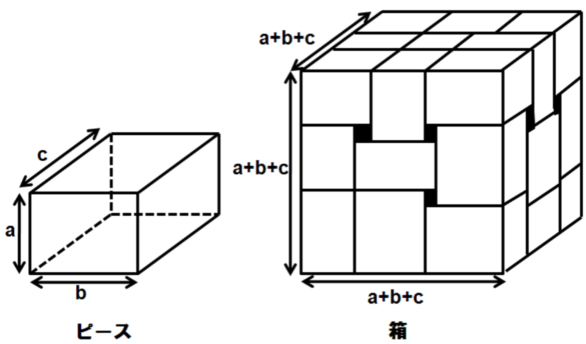


図 2.2: Hoffman パズル

第3章　Hoffmanパズルの解の列挙

3.1　準備

Hoffmanパズルではひとつのピースの置き方は6通りある (図3.1)．そのため，Hoffmanパズルの解の列挙を考える場合，27個のピースの入れ方を単純に総当たりで列挙すると全体で6^{27}通り調べることになり計算時間の爆発を起こしてしまう．計算爆発を起こさないために，Hoffmanパズルの制約条件をうまく使うことによって無駄な探索空間を削った．また，ひとつのピースを固定することによって探索時に現れる回転や反射によって得られる対称な解をある程度回避した．

実装においてはHoffmanパズルがa, b, cの値によらないことを示すため，Hoffmanの条件が成立する具体的なa, b, cの値を使わず，a, b, cの大小関係のみを使って探索を行った．

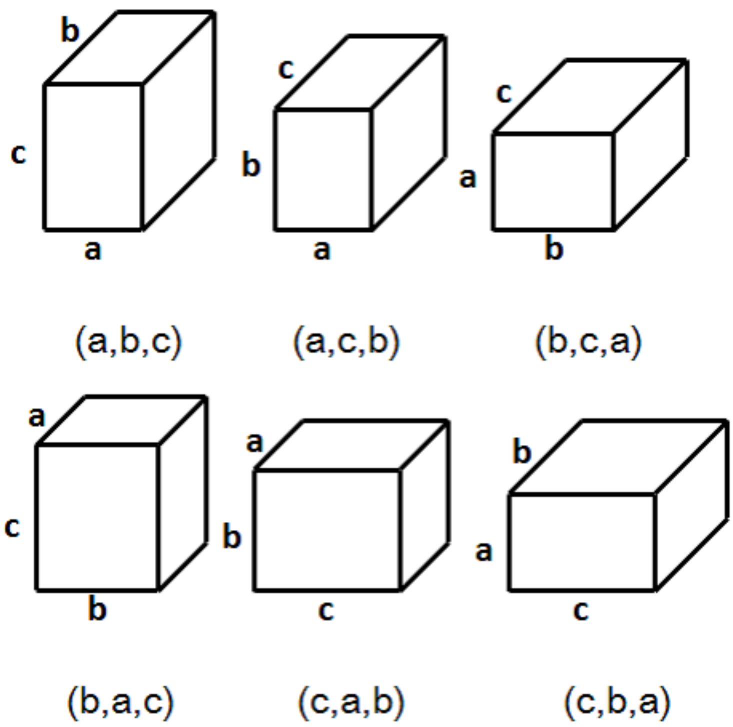


図 3.1: Hoffmanパズルのピースの6通りの置き方

3.2　セグメント点

この章ではセグメント点を定義する．ここで本パズルにおける座標系を導入する．まずパズルの箱の頂点の座標を (α, β, γ) とする．ただし，$\alpha, \beta, \gamma \in \{0, a+b+c\}$ とする．次にブロックの位置を議論するためセグメント点を導入する．

セグメント点とは $p_{1,1,1}$ から $p_{3,3,3}$ までの 27 個の点である (図 3.2)．ここで，$p_{i,j,k}$ は以下の式で定義される．

$$p_{i,j,k} = (\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k)(i,j,k \in \{1,2,3\})$$

上の式の α_1,α_2,α_3 は以下で定義される．

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a+b+c}{3}$$

$$\alpha_2 = 3\alpha_1$$

$$\alpha_3 = 5\alpha_1$$

以下の条件を満たすときセグメント点 $p_{i,j,k}$ がピースに含まれるという．

$$p_{i,j,k}\text{がピース } b \text{ に含まれる} \Leftrightarrow p_{i,j,k}\text{が } b \text{ の内部または表面上の点}$$

3.3　セグメント

セグメントとはピースの集合であり，以下のいずれかで表されるものである．

各ピースが $\{p_{i,j,1}, p_{i,j,2}, p_{i,j,3}\}$ のいずれかのセグメント点を含むもの

又は

各ピースが $\{p_{i,1,k}, p_{i,2,k}, p_{i,3,k}\}$ のいずれかのセグメント点を含むもの

又は

各ピースが $\{p_{1,j,k}, p_{2,j,k}, p_{3,j,k}\}$ のいずれかのセグメント点を含むもの

つまり，セグメントに含まれるピースはある軸方向にそって並んでいる．セグメント内のピースの長さを軸方向に足したものをそのセグメントの長さという．セグメント S に含まれるピースの数が q 個あるとき，そのセグメント S は q-セグメントであるという (図 3.3)．

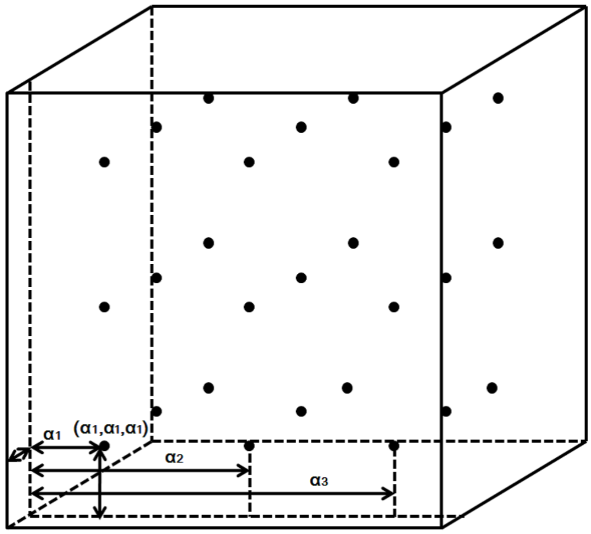
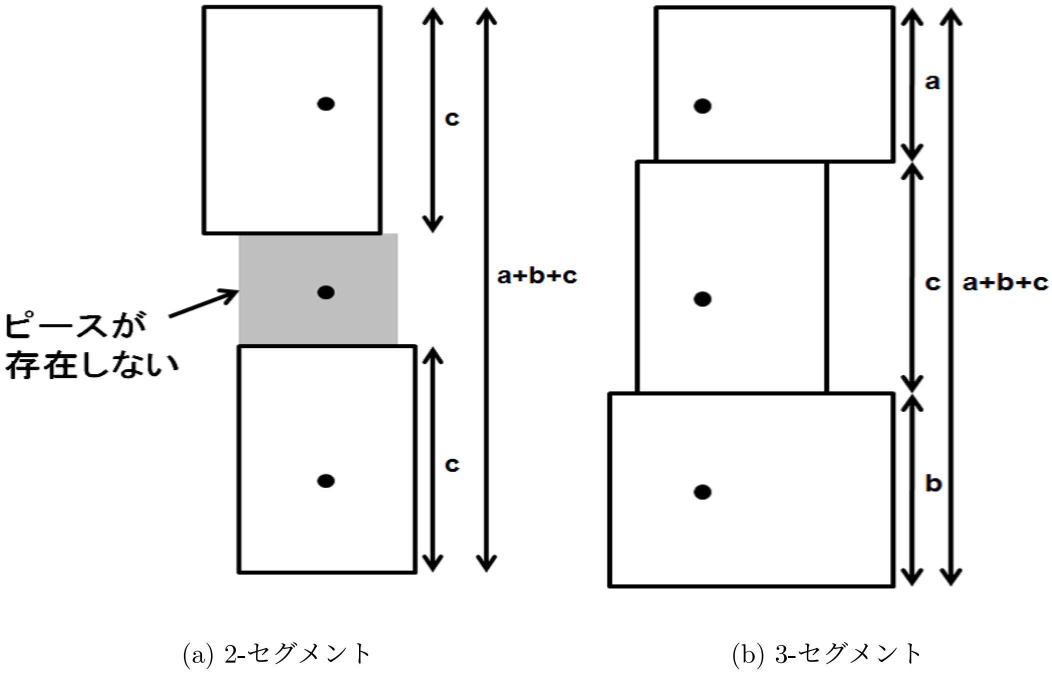


図 3.2: セグメント点



(a) 2-セグメント　　(b) 3-セグメント

図 3.3: セグメント

3.4 Hoffman パズルの制約条件

箱は一辺の長さが $a+b+c$ の立方体なので，x 軸，y 軸，z 軸上で 3 つの直方体のピースが並んだ場合，長さが高々$a+b+c$ にならなくてはならない．ピースが持っている長さは a, b, c の 3 種類あり，またピースの数は 27 個である．また，セグメントは x 軸，y 軸，z 軸上の 3 方向に 9 個ずつあるので全部で 27 個ある．よって，1 つのセグメントの平均の長さは，

$$S = \frac{27(a+b+c)}{27} = a+b+c$$

である．したがって，セグメントのいずれかの長さが $a+b+c$ 未満になると，別のいずれかの長さが $a+b+c$ をこえる長さになる．上の条件により各セグメントの長さは高々 $a+b+c$ でなくてはならない．よって，各セグメントの長さはちょうど $a+b+c$ になる．Hoffman の条件より，各セグメントには a, b, c がそれぞれ一つずつ使われる．よって，Hoffman パズルでは全セグメントは 3-セグメントである．また，各 3-セグメントには a, b, c が 1 つずつ並ぶので隙間ができることはない．これは，解においてピースがスライドしないことを意味している．

3.5 探索順序

計算時間の爆発を抑えながら探索を行なうため、図 3.4 のように，探索は 4 つのグループに分けて行なった．まず，下の層の角のピースの配置を固定することにより回転や反射による対称性を多少回避した．次に，角のピースの配置が決まることで影響を受ける角のピースを含む x 軸，y 軸，z 軸のセグメントに含まれるピースの配置を列挙した．残ったピースも同様に配置が決まることで影響を受けるピースの配置を列挙していった．Hoffman パズルの制約条件を使うことにより早い段階から枝刈りを行った．

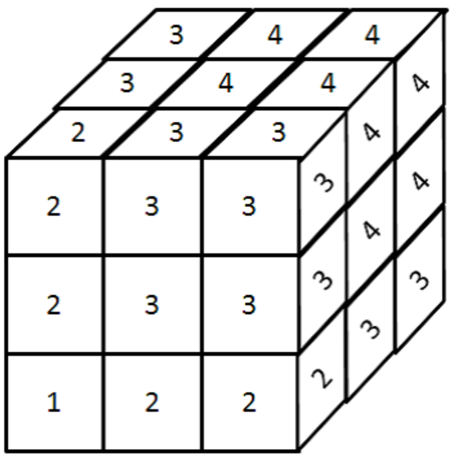
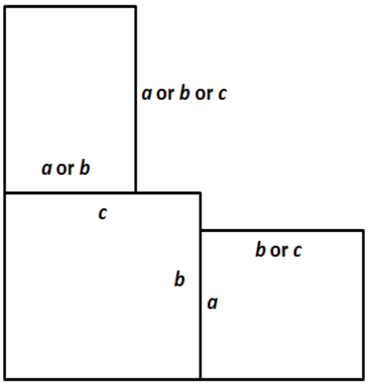


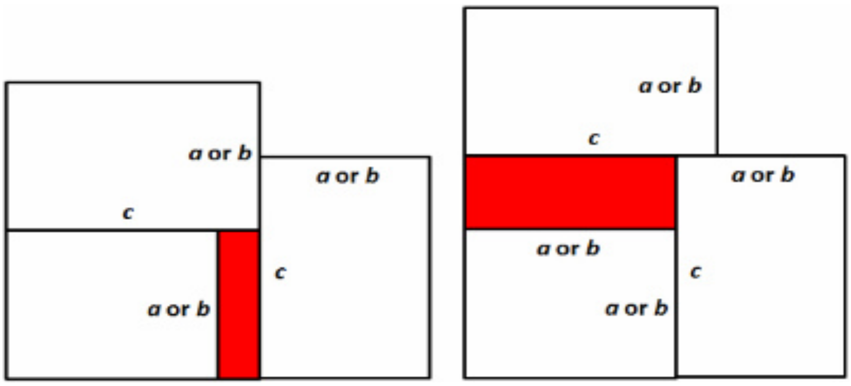
図 3.4: 探索順序

3.6　解にならない配置

Hoffman パズルの解を求める過程において，直方体のピースが干渉して隙間ができる場合がある．同じ層同士の直方体のピースが干渉するパターンが 2 つ (図 3.5)，違う層の直方体のピース同士が干渉するパターンが 1 つ (図 3.6) 存在した．



(a) パターン 1



(b) パターン 2

図 3.5: 同じ層のピースが干渉するパターン 1,2

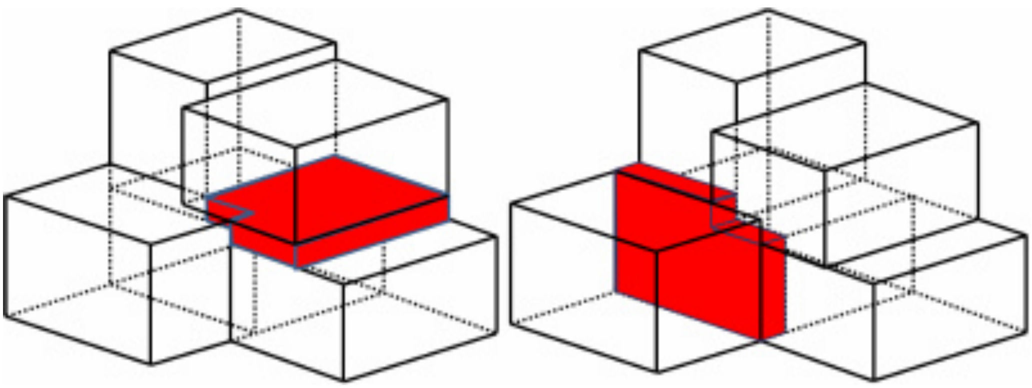


図 3.6: 同じ層のピースが干渉するパターン 3

3.7　回転・反射による対称な解の排除

直方体のピースをはじめに 1 つ固定するだけでは回転や反射による対称性を完全には回避することができなかった．回転や反射によって得られる対称な解を導き出し，重複した解の排除を行った．各面で 12 パターン，立方体の面が 6 面から，全体で 72 パターンの回転と反射を導き出した．

3.8　結果

Hoffman パズルの本質的に異なる解を 21 通り得て，確認することができた．そして，Hoffman パズルの 21 通りの解が a, b, c の値によらないことを確認した．

第4章　Hoffman-Knuthパズル

4.1　Hoffman-Knuthパズル

2004 年に Knuth は Hoffman パズルを拡張し，条件が

$$\frac{1}{4}(a+b+c) = a < b < c$$

の場合を考察した．この条件を **Hoffman-Knuth の条件**と名付ける．また，Hoffman-Knuth の条件が成立するパズルを **Hoffman-Knuth パズル**と名付ける．明らかに Hoffman パズルの 21 個の解は Hoffman-Knuth パズルの解である．以下では特にことわらない限りはこの Hoffman パズルの解とは異なるものを考える．

Hoffman-Knuth の条件より

$$a+b+c = 4a \tag{4.1}$$

が成り立つ．この式より，a を 4 つ並べた物と箱の 1 辺 $a+b+c$ が等しいことが分かる．よって．Hoffman-Knuth パズルでは 4 つのピースを並べて入れることができる．つまり，Hoffman-Knuth パズルでは Hoffman パズルでは存在しなかった 4-セグメントが存在する (図 4.1)．4-セグメントの場合，中央のセグメント点を 2 つのピースが共有する．この場合，セグメント点を共有する 2 つのピースを他の軸方向から見ると図 4.2 のような関係になる．この時は点線部分 (正確にはこの 2 つのピースを含む最も小さい直方体) を 1 つの仮想的なピースとみなし，これは 3-セグメントであると考える．実際に Knuth はピースのサイズを

$$(a, b, c) = (3, 4, 5)$$

に限定して検討し，27 個だけでなく 28 個のピースが少なくとも 3 通りの方法で入ることを示した．また、2010 年には石野が Hoffman-Knuth パズルのピースのサイズを

$$(a, b, c) = (4, 5, 7)$$

に限定して検討し，28 個詰められる解が存在することを示した [2][3]．なお，この解においては Hoffman パズルと違って位置の固定されないピースが存在する．

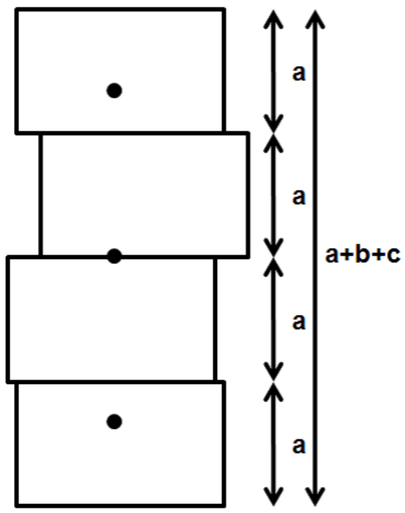


図 4.1: 4-セグメント

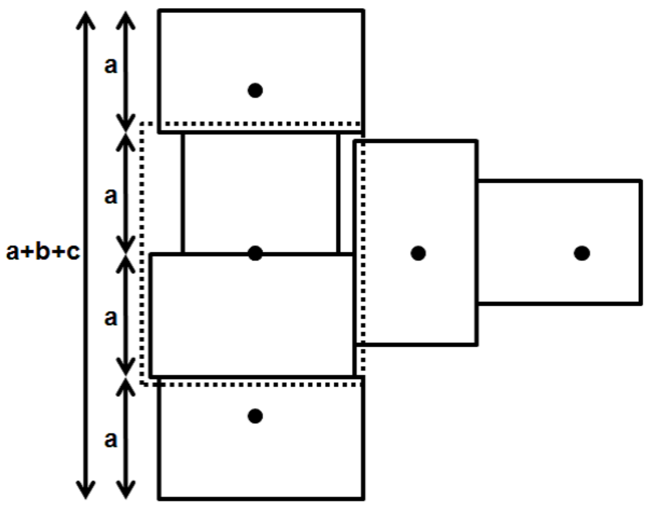


図 4.2: 4-セグメントと 3-セグメント

4.2 Hoffman-Knuth パズルのピースの 3 辺の長さ

Hoffman-Knuth パズルのピースの 3 辺の長さを考える．まず,

$$\frac{(a+b+c)}{4} = a < b < c$$

から

$$b + c = 3a$$

が得られる．この両辺から $b > a$ という関係を引くと,

$$c < 2a$$

が得られる．以上をすべて合わせると，以下の関係が得られる．

$$a < b < \frac{3a}{2} < c < 2a$$

$$(b - a) = (2a - c)$$

数直線上で考えると b と c は $\frac{3a}{2}$ を中心として，$(a, 2a)$ の区間内に左と右に対称に配置される（図 4.3, 図 4.4）．

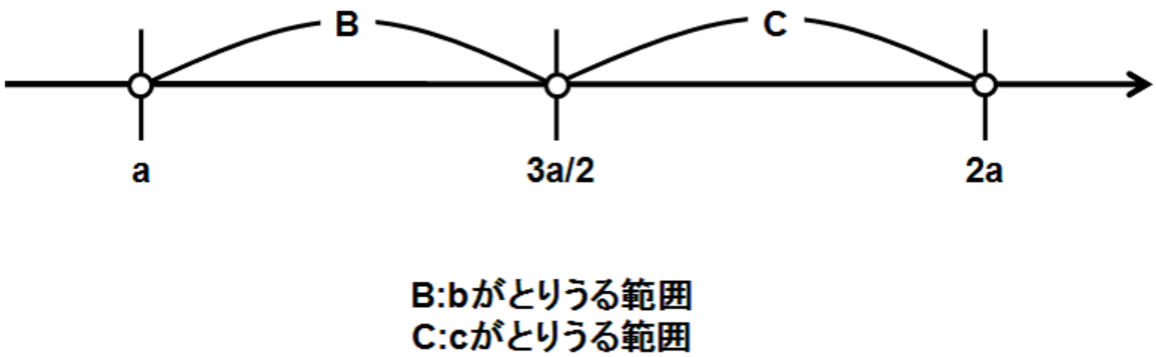


図 4.3: 辺の長さの関係

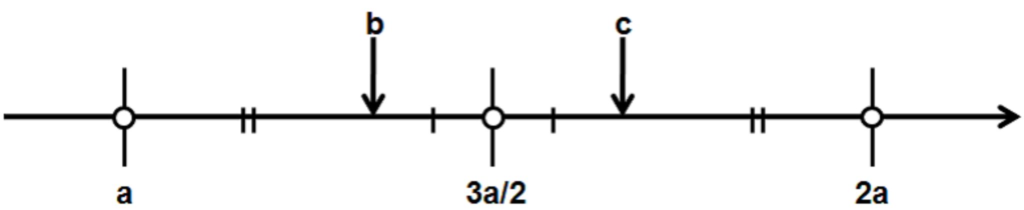


図 4.4: b, c が決まったときの数直線上における関係

第5章　Hoffman-Knuthパズルの解に関する証明と列挙

5.1　箱の容積とピースの体積の関係

Hoffman パズルと Hoffman-Knuth パズルにおいて，箱の容積を C，ピースの個数を k，ピースの体積を v としたとき，

$$C \geq kv$$

は解を持つための必要条件である．よって，Hoffman-Knuth パズルにおけるピースの個数 k に対して以下の式が成り立つ必要がある．

$$\frac{\text{箱の容積}}{\text{ピースの体積}} = \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq k \tag{5.1}$$

この式は 4.1 章の $a+b+c=4a$ より，

$$\frac{(4a)^3}{abc} = \frac{64a^3}{abc} \geq k \tag{5.2}$$

と書き直すことができる．4.2 章より，b, c は $(\frac{3a}{2})$ を中心に等距離 ϵ だけ離れているとしてよいので，

$$b = \left(\frac{3a}{2} - \epsilon\right)$$
$$c = \left(\frac{3a}{2} + \epsilon\right)$$

とおくことができる．よって，

$$abc = a\left(\frac{3a}{2} - \epsilon\right)\left(\frac{3a}{2} + \epsilon\right) = a\left(\frac{9a^2}{4} - \epsilon^2\right)$$

ここで $0 < \epsilon < \frac{a}{2}$ であるため，式 5.2 にこれを代入すると，

$$k \leq \frac{64a^3}{abc} = \frac{64a^3}{a(\frac{9a^2}{4} - \epsilon^2)} = \frac{64a^2}{(\frac{9a^2}{4} - \epsilon^2)}$$

を得る．$0 < \epsilon < \frac{a}{2}$ なので

$$k \leq \frac{64a^2}{(\frac{9a^2}{4} - \epsilon^2)} < \frac{64a^2}{(\frac{9a^2}{4} - (\frac{a}{2})^2)} = \frac{64 \times 4}{(9-1)} = 32$$

したがって，$k < 32$ を得る．よって，Hoffman-Knuth パズルはピースが 32 個以上のとき解を持たない．

5.2　ピース 28 個の場合

本研究を通じて得られたピースの 28 個の解は 16 通りであった．石野に確認したところ，ピース 28 個の解は 20 通りであることを指摘された．以下，本章で示す解は石野によって求められたものに基づいている [4]．まず最初に見つけた 16 通りの解を示す．

大きく分けて 2 パターン (図 5.1) の解を見つけることができた．

(a) パターン 1　　(b) パターン 2

図 5.1: ピース 28 個の解

図 5.1 のパターン 1 の解の場合，図 5.3 のように 2 種類のセグメントで構成されている．この 2 種類のセグメントが 4 つのブロックに別れている．各ブロックが図 5.4 のどちらかの形で置かれている．これをすべて数え上げると図 5.5 のようになる．よって，図 5.1 のパターンの解の数は 6 個となる．

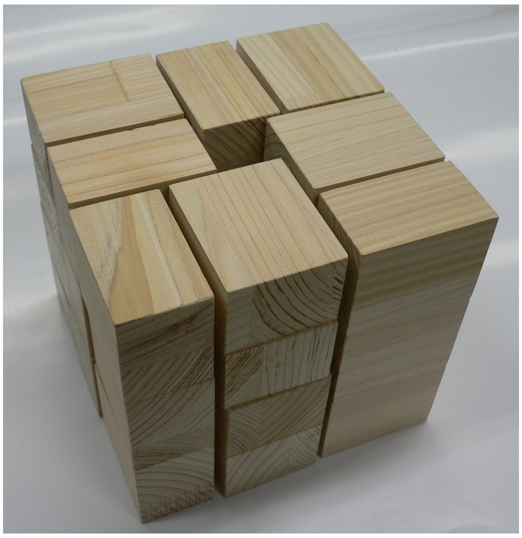


図 5.2: ピース 28 個の解 (パターン 1)

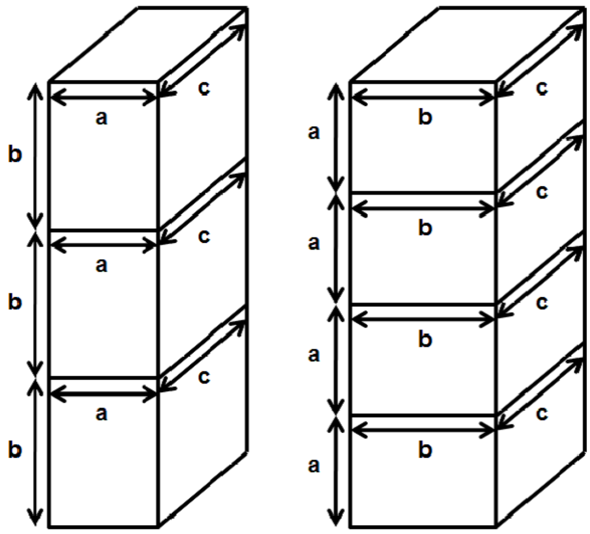


図 5.3: ピース 28 個の解 (パターン 1) のセグメント

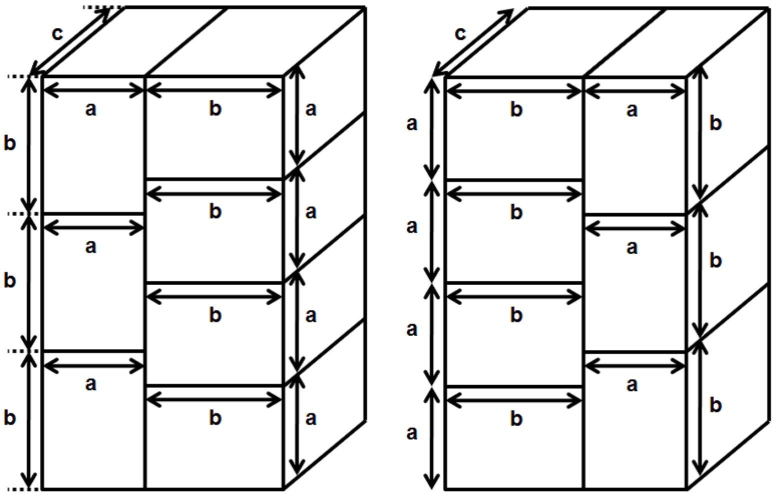


図 5.4: ピース 28 個の解 (パターン 1) のセグメントのパターン

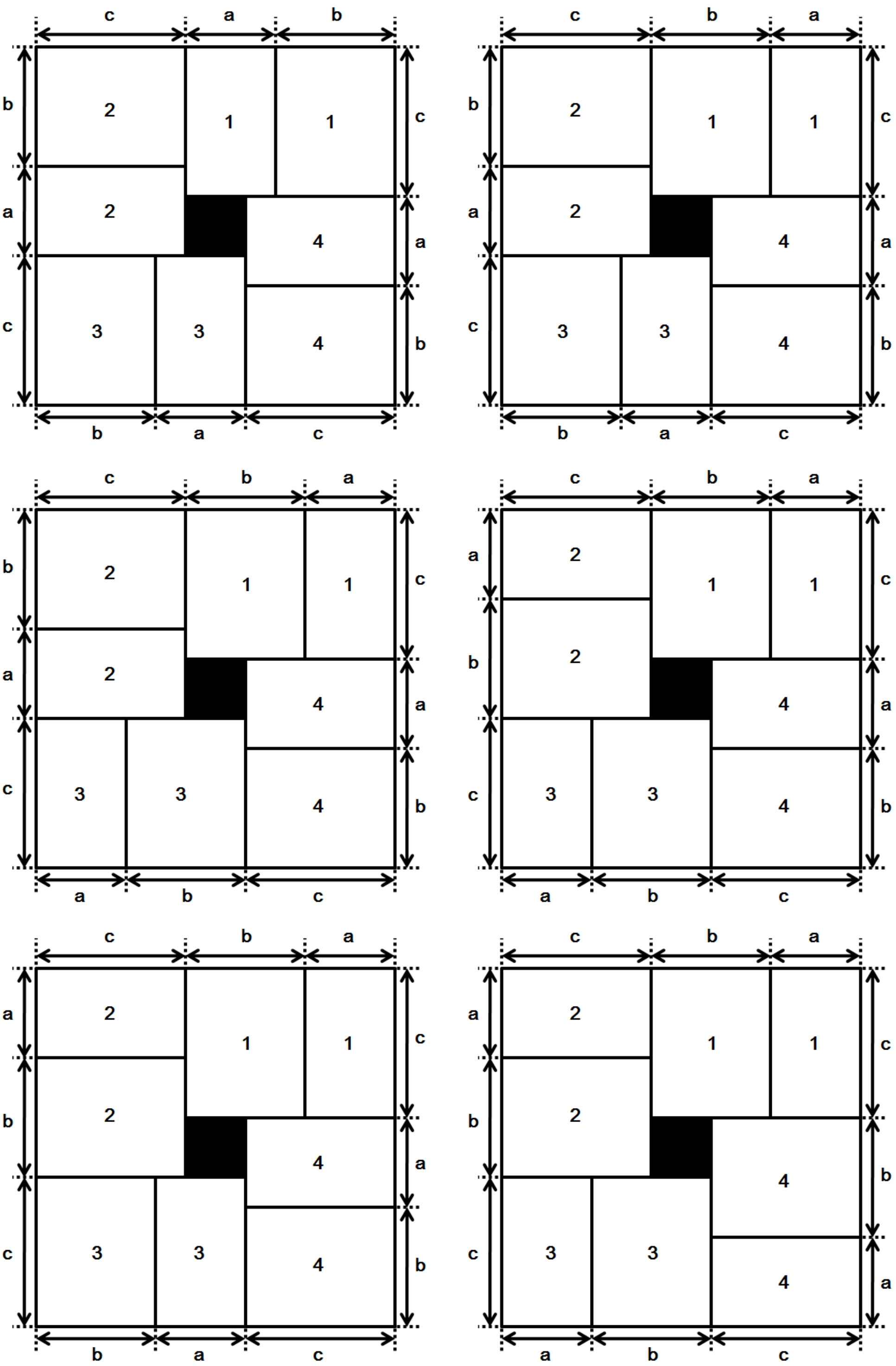


図 5.5: ピース 28 個の解 (パターン 1) の全パターン (上からの図)

次に，図 5.1 のパターン 2 の解の場合，図 5.7 と図 5.8 のように上部分と下部分に分けることができる．上部分は 4-セグメントだけで構成される．4-セグメント軸の向きを変えることでパターンは 2 通りある．下部分は図 5.9 のようなピースの塊で構成されている．このピースの塊が 4 つのブロックに別れている．図 5.9 のピースの塊は図 5.10 のどちらかの形で置かれている．これをすべて数え上げるとこれも図 5.5 のようになる．下部分のパターン数は 6 個である．上部分のパターン数と下部分のパターン数から考えられる解は 12 個．ここから，回転や反射を省くと解は 10 個となる．よって，図 5.1 のパターン 2 の解の数は 10 個となる．

図 5.6: ピース 28 個の解 (パターン 2) の下部分

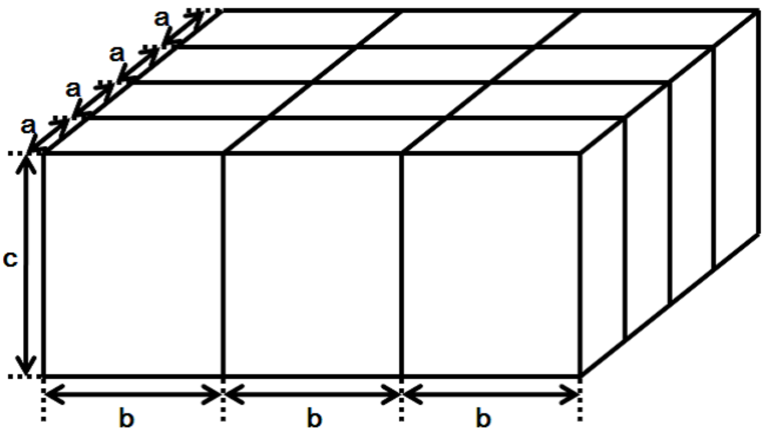


図 5.7: ピース 28 個の解 (パターン 2) の上部分

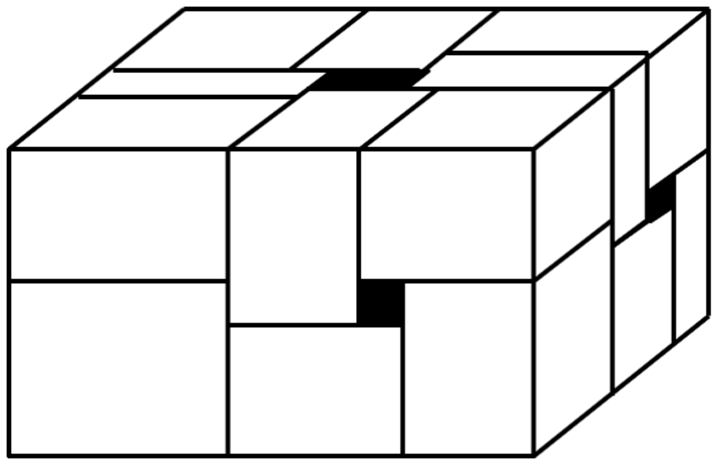


図 5.8: ピース 28 個の解 (パターン 2) の下部分

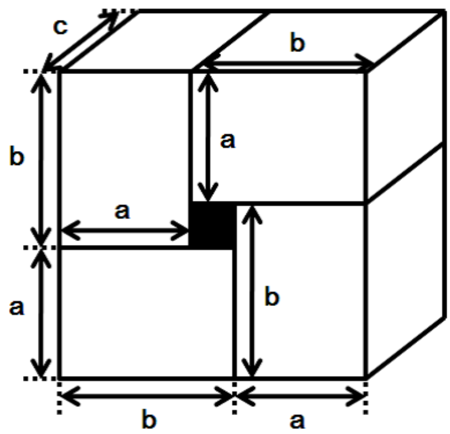


図 5.9: ピース 28 個の解 (パターン 2) の下部分を構成するピース

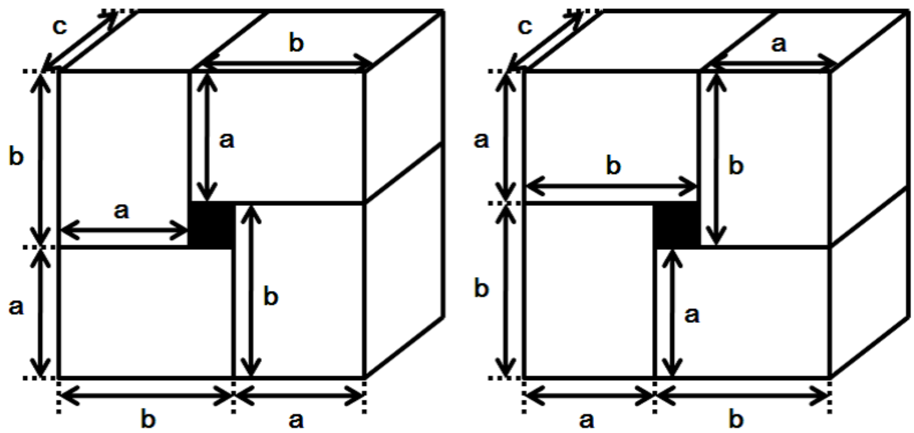


図 5.10: ピース 28 個の解 (パターン 1) の下部分を構成するピースのパターン

次に石野に指摘された 4 個の解を示す (図 5.11)．石野に指摘された解の場合，上の層と中の層に存在する図 5.9 のようなピースの塊の部分 2 つと他の部分で構成されている．図 5.9 のピースの塊は図 5.10 のどちらかの形で置かれている．図 5.9 のようなピースの塊の部分 2 つ以外はいつも同じ形で置かれている．これをすべて数え上げると解の数は図 5.12，図 5.13，図 5.14，図 5.15 の 4 個となる．

図 5.11: 石野が指摘したパターン

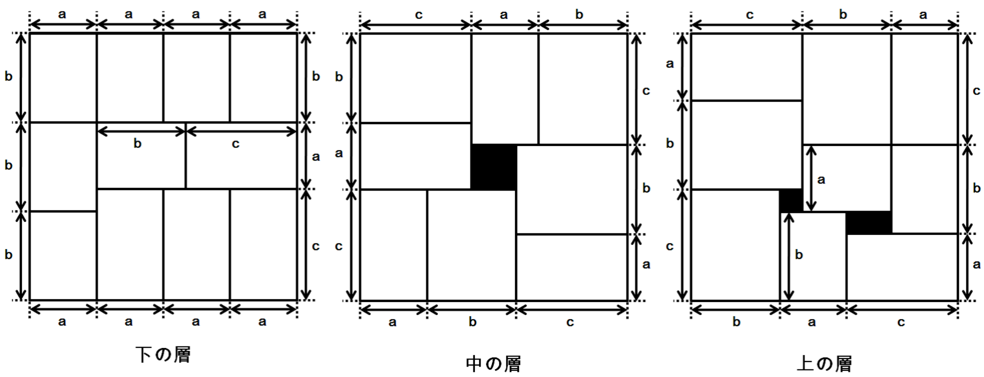


図 5.12: 石野が指摘した解 1

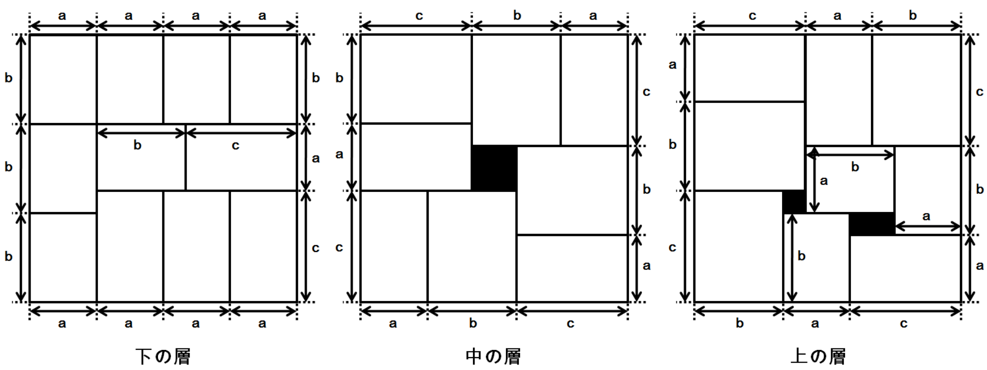


図 5.13: 石野が指摘した解 2

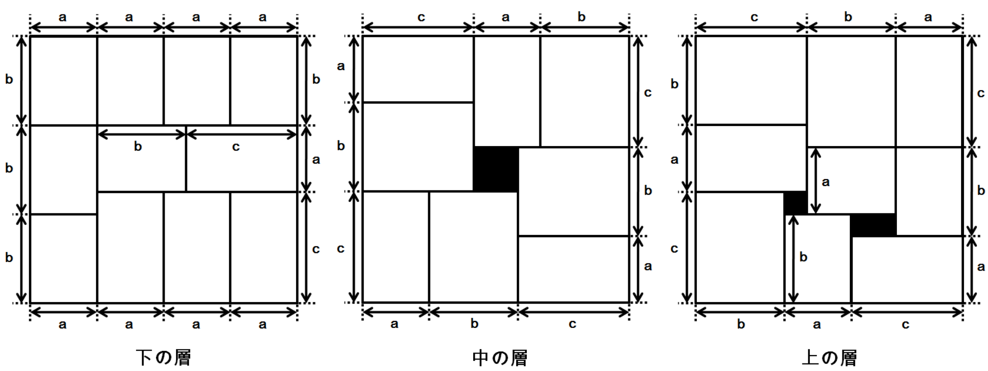


図 5.14: 石野が指摘した解 3

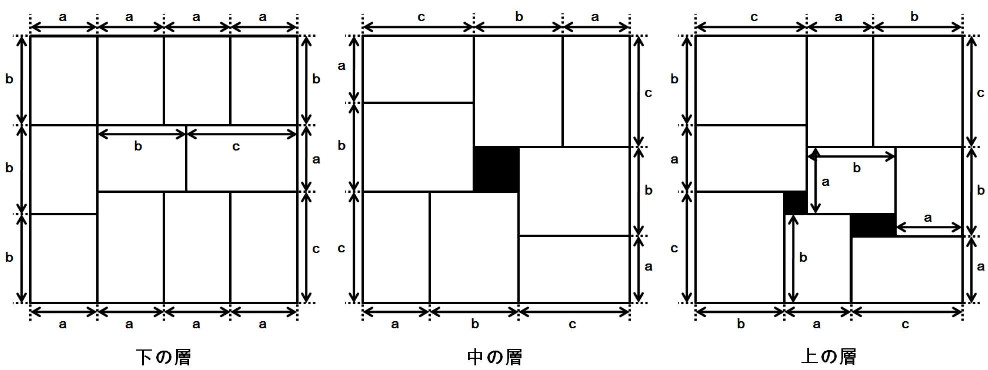


図 5.15: 石野が指摘した解 4

　ではこれらの解は Hoffman-Knuth の条件を満たす任意のピースで有効なのだろうか．以下ではこの問題を考察する．

　この 20 個の解が成立するには

$$3b \leq a + b + c$$

つまり

$$2b \leq a + c \tag{5.3}$$

の条件を満たしている必要がある．ここで，4.2 章より

$$b = (1 + \alpha)a$$

$$c = (2 - \alpha)a$$

と置くことができる．上式より，

$$2(1 + \alpha)a \leq a + (2 - \alpha)a$$

となり，これを整理すると $\alpha \leq \frac{1}{3}$ を得る．よって下記の 3 つの条件を満たす場合のみ Hoffman-Knuth パズルは解を持つ (図 5.16，図 5.17)．

$$1.\quad a < b \leq \frac{4a}{3} \tag{5.4}$$

$$2.\quad \frac{5a}{3} \leq c < 2a \tag{5.5}$$

$$3.\quad \frac{3}{2}a - b = c - \frac{3}{2}a \tag{5.6}$$

　例えば，

$$(a, b, c) = (3, 4, 5), (4, 5, 7), (5, 6, 9), \cdots$$

なら Hoffman-Knuth パズルは解を持つが，

$$(a, b, c) = (5, 7, 8), (7, 10, 11), (8, 11, 13), \cdots$$

の場合 Hoffman-Knuth パズルは解を持たない．

　よって，Hoffman-Knuth パズルは式 5.4，式 5.5，式 5.6 が成立する時に限りピースが 28 個の時に 20 通りの解を持つ．

5.3　ピース 29 個の場合

　Hoffman-Knuth パズルが 29 個のピースを使った解を持つかどうかを考える．

　まず，ピースが 29 個入ったと仮定する．ピースが 29 個入る解が存在した場合 4-セグメント S が必ず一つはある．S のブロックを 1 つ取り除くとこれはピースが 28 個の時の解であり，かつ a が 3 つ並んだ 3-セグメントが存在する．しかし，ピースが 28 個の解には a が 3 つ並んだ 3-セグメントが存在する解はどこにもない．よって，ピースが 29 個以上入る解は存在しない．

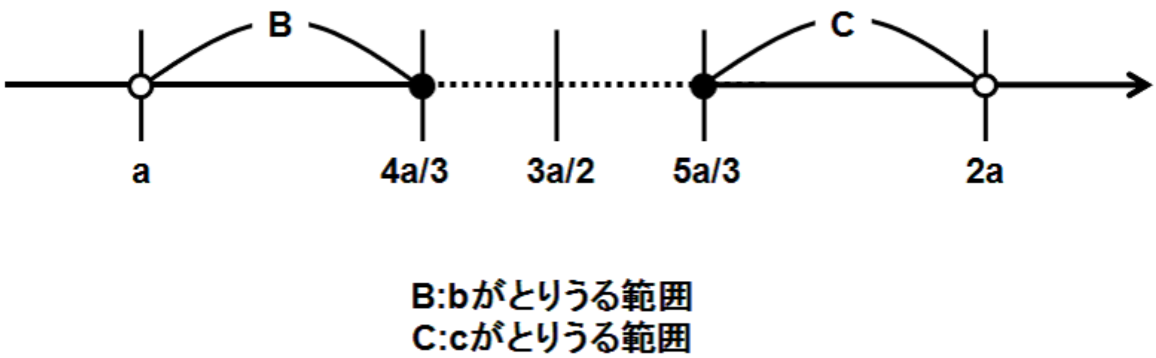


図 5.16: b と c のとりうる値

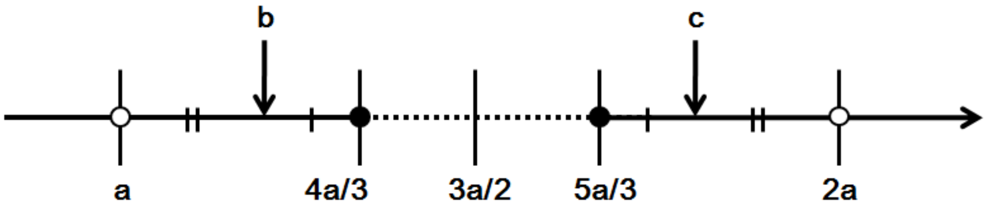


図 5.17: b, c が決まったときの数直線上の関係

第6章　まとめ

本論文では，Hoffman パズルの解析，および，Hoffman パズルから Hoffman-Knuth パズルへの一般化と Hoffman-Knuth パズルの解析を行った．

今後の課題としては，Hoffman-Knuth パズルをより一般化したパズルの解析が挙げられる．

謝辞

本研究を行うにあたり，日頃から親切丁寧な指導を賜った上原隆平准教授には心より感謝します．浅野哲夫教授，清見礼助教をはじめとする浅野・上原研究室の皆様には，数多くのご助言，ご支援を頂き，厚くお礼を申し上げます．見つけられなかった解を指摘していただき，かつ相談に乗っていただいた石野恵一郎さんに深く感謝します．また，Hoffman-Knuth パズルを実際に作っていただいた積み木インテリアギャラリーいたち丸の中川宏さんに深く感謝いたします．最後に，大学院での生活を支えてくれた家族に感謝します．

参考文献

[1] D. G. Hoffman, Packing Problems and Inequalities, *Mathematical recreations,* Dover (1998), pp. 212–225.

[2] R. Uehara, *personal communication* (2010).

[3] K. Ishino, *personal communication* (2010).

[4] K. Ishino, *personal communication* (2011).