

Title	複数の単位円による点集合の排他的被覆
Author(s)	岡山, 陽介
Citation	
Issue Date	2011-03
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	http://hdl.handle.net/10119/9654
Rights	
Description	Supervisor: 上原隆平, 情報科学研究科, 修士

修 士 論 文

複数の単位円による点集合の排他的被覆

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報科学専攻

岡山陽介

2011 年 3 月

修 士 論 文

複数の単位円による点集合の排他的被覆

指導教官 上原隆平准教授

審査委員主査 上原隆平准教授

審査委員 浅野哲夫教授

審査委員 平石邦彦教授

北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科情報科学専攻

0910010 岡山陽介

提出年月: 2011 年 2 月

概 要

電波による通信を用いたサービスでは、基地局の通信の範囲は円となる。複数の基地局からの通信が重なることで不具合がでる場合もあり、どのように基地局を配置するかが問題になる。ここでサービスの利用者を点、電波の届く範囲を単位円としたときに、重なりの無い単位円集合ですべての点を覆えるか、という問題が考えられる。本研究では、これを複数の単位円による点集合の排他的被覆問題として取り扱う。

どのように配置しても必ず単位円で覆える点の個数 k は1以上で上限があり、既知の結果として $10 \leq k < 108$ が知られている。本研究では、この上界と下界を改善することを目的とし、提案手法により $10 \leq k < 54$ と改善することができた。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	本研究の背景と目的	1
1.2	本論文の流れ	2
第2章	用語の定義	3
2.1	円	3
2.2	単位円のシート	3
2.3	その他	3
第3章	複数の単位円による点集合の排他的被覆問題	5
3.1	上界	5
3.2	下界	8
第4章	下界の改善	11
4.1	提案手法	11
4.2	計算機実験	12
4.2.1	手法1	12
4.2.2	手法2	16
第5章	上界の改善	19
5.1	格子に基づく改善	19
5.1.1	正方格子の改善	19
5.1.2	三角格子	20
5.1.3	六角格子	21
5.2	格子に基づかない上界	22
5.2.1	計算機実験1	22
5.2.2	計算機実験2	23
5.3	さらなる改善	29
第6章	まとめ	32

第1章 はじめに

1.1 本研究の背景と目的

近年、電波を利用して提供するサービスは増加している。無線 LAN や携帯電話、テレビの電波など、多岐にわたる。電波の到達範囲は地上の円で表すことができる。電波の到達範囲を表す円が重なると、テレビの映像にゴーストが出る、無線通信が混信する、などの不具合が引き起こされる場合もあり、基地局をどのように配置するかが問題となる。また、サービスの利用者はすべて電波に覆われている必要があり、円が重ならないことと矛盾が出る場合もある。

ここで、サービスの利用者を点、電波の届く範囲を単位円とすると、重なりの無い単位円集合ですべての点を覆えるか、という問題が考えられる。本研究では、これを複数の単位円による点集合の排他的被覆問題として取り扱う。

この問題は、稲葉 [1] により考えられたもので、点集合の配置が与えられたとき、重なりの無い単位円集合ですべて覆えるかどうかを考える (図 1.1)。ここで、単位円集合により覆われる点の個数を考える。点が1つの場合、単位円が1つあればその点を必ず覆うことができる。点が2つの場合でも、単位円が1つまたは2つあればその2つの点を必ず覆うことができる。しかし、数多くの点を細かく格子状に並べると単位円で排他的に覆えないことがある (図 1.2)。よって、どのように配置しても必ず単位円で覆える点の個数 k は2以上で上限があることが分かる。既存の結果として $10 \leq k < 108$ が知られている [1][2]。

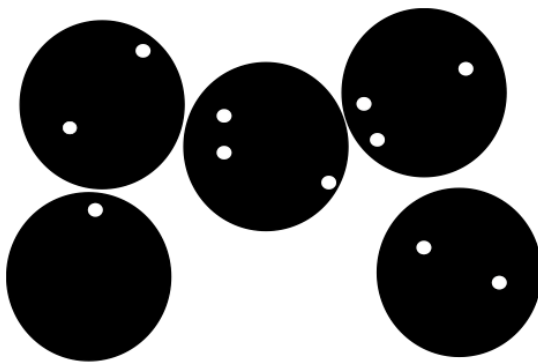


図 1.1: 点集合とそれを覆う単位円集合

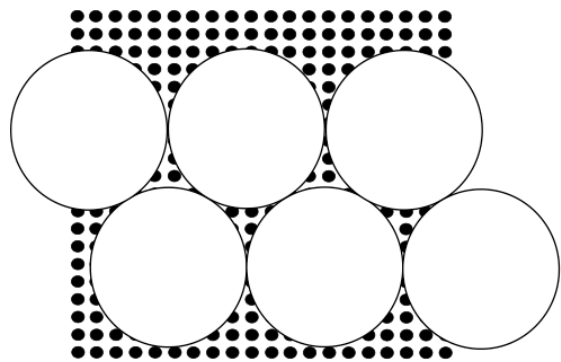


図 1.2: 単位円集合で覆えない点集合

また Peter Winkler によると, 60 個という上界を与える点の配置が発見されている [3]. また, Veit Elser により, 55 個という上界の証明がされている [4]. そこで本研究では, この k の値をより正確に評価することを目的とする. つまり k の値のよりよい上界および下界を求めることを目的とする.

上原・浅野により示された上界は, 正方格子の格子点上に配置した点集合を元に, 単位円集合で覆うことができない点の配置を実現する点の個数を求めることで示されている. また稲葉により示された下界は, 単位円を最も稠密に並べたときにできる隙間と単位円の面積との比をもとにして示されている.

本研究では 4 通りの方法で上界の改善を試みる. 1 つ目は, 上原・浅野の用いた正方格子の格子の幅をより大きなものにしても単位円で被覆できない点が存在することを示し, それによって改善される上界を求める. また, 平面を合同な図形で隙間無く覆うことのできる正多角形には, 正方形の他に正三角形, 正六角形がある. ここから 2 つ目の方法として, 三角格子を用いた場合, 3 つ目の方法として, 六角格子を用いた場合に導出される上界を求める. さらに 4 つ目に, 格子を利用しない方法として, 最大空円の手法を用いて上界を改善することができないか考察と計算機実験を行う.

下界については, 単位円を最も稠密に並べたときにできる隙間と単位円を離散化して表現し, 隙間の部分で単位円を覆うことができるかどうかを計算機により全探索を行い確かめる. そこから, 11 点に下界が改善できるかどうかを調べる.

1.2 本論文の流れ

本論文では, まず 2 章にて本論文で用いる用語の定義を行う. 3 章で上界と下界それぞれの既存の求め方を示し, 4 章では提案する手法により下界を改善するため計算機実験を行った結果, 5 章では提案する手法により上界を改善するため計算機実験を行った結果を示す.

第2章 用語の定義

ここでは、本論文で用いる用語などについて定義を行う。

2.1 円

中心座標が (x_0, y_0) かつ半径 r の円 $C(x_0, y_0, r)$ を以下のように表す。

$$C(x_0, y_0, r) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

特に $r = 1$ の円を単位円と呼び、 $C(x, y)$ と表す。

2.2 単位円のシート

中心が (x, y) となる単位円を1つの構成要素とし、単位円を隙間が最も小さくなるように無限に敷き詰めたものを単位円のシート $S(x, y)$ と呼ぶ。正確には、 $S(x, y)$ は以下で定義される。

$$S_1(x, y) = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} C(2i + x, y)$$

$$S_2(x, y) = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} S_1(x, 2\sqrt{3}i + y)$$

$$S_3(x, y) = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} C((2i + 1) + x, y)$$

$$S_4(x, y) = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} S_3(x, 2\sqrt{3}i + y)$$

としたとき $S(x, y) = S_2(x, y) \cup S_4(x, y)$ 。

単位円のシート $S(0, 0)$ を図 2.1 に示す。図 2.1 は実際には単位円が無限に続いている。

2.3 その他

単位円のシート $S(0, 0)$ と (x, y) を中心とする単位円 $C(x, y)$ があるとき (図 2.2)、共通部分 I は以下ようになる。

$$I = \{(x', y') | (x', y') \in C(x, y) \cap (x', y') \in S(0, 0)\}$$

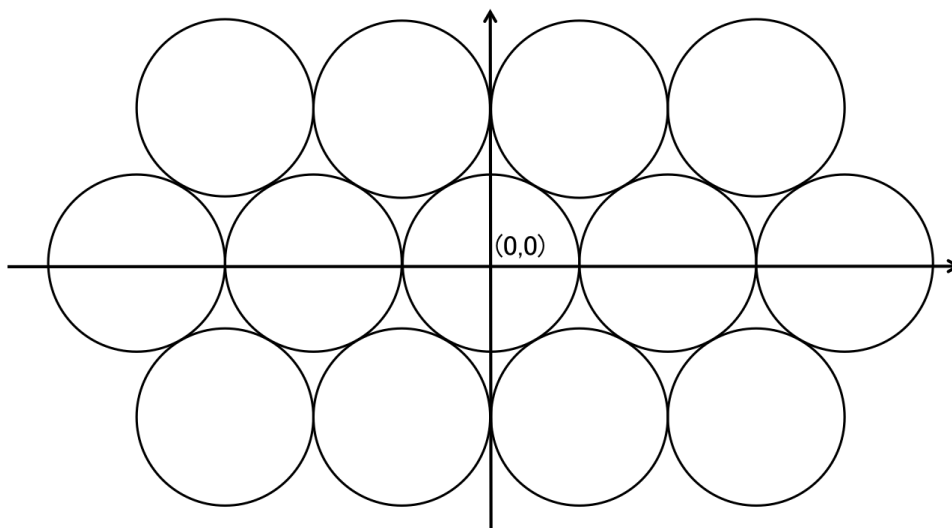


図 2.1: 単位円のシート $S(0,0)$

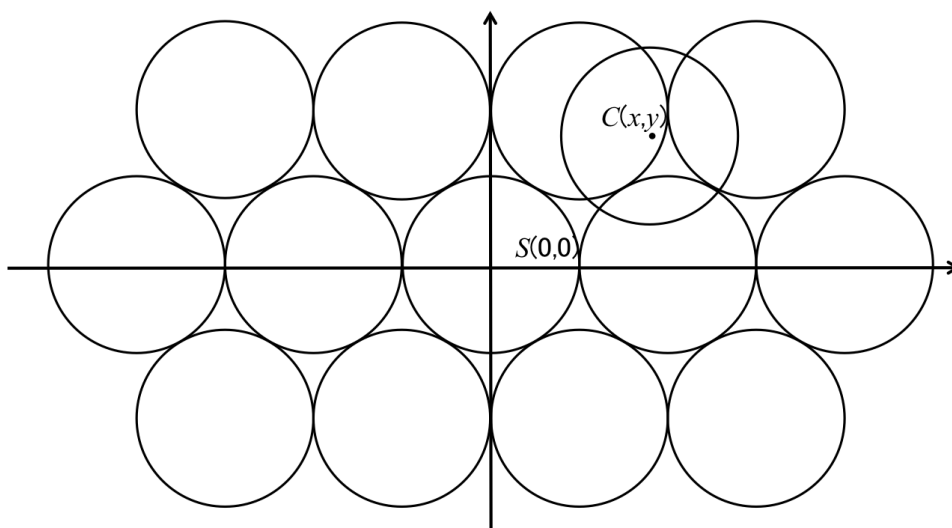


図 2.2: 単位円のシート $S(0,0)$ と単位円 $C(x,y)$

次に, I を (x,y) が原点となるように x 座標を $-x$, y 座標を $-y$ として平行移動したものを共通部分のシフト $D(x,y)$ とすると $D(x,y)$ は以下ようになる.

$$D(x,y) = \{(x'',y'') | (x'',y'') \in C(0,0) \cap (x''+x, y''+y) \in S(0,0)\}$$

第3章 複数の単位円による点集合の排他的被覆問題

3.1 上界

上原・浅野により, 108 個の上界が示されている [2]. [2] では, 単位円のシート $S(x, y)$ で, すべての点を覆うことができない配置を実現する点の数を求めている. 単位円の並べ方には, 他の配置も考えられるが, まず単位円のシートの場合について考える. また, 単位円のシートの動かし方は, 平行移動のみを考える. 以下にその概要を示す.

まず, 単位円のシートの隙間 $\overline{S(x, y)}$ に包含される円の中で, 半径が最大となる円の半径を求める. この円の中心は, 単位円の中心を線分をつないだ正三角形の重心である (図 3.1). この正三角形の高さは正三角形の垂直二等分線なので $\sqrt{3}$ となる. また正三角形から重心までの長さは垂直二等分線の $\frac{2}{3}$ である. 正三角形の頂点から重心までの長さから単位円の半径をひくと, 求める円の半径 r が定まり, $r = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \approx 0.1547$ となる. 次に, $S(x, y)$ の隙間 $\overline{S(x, y)}$ に半径 r の円をできるかぎり詰め込むことを考える (図 3.3). このときの半径 r の円の集合を $R(x, y)$ と表すと, $\forall x_0, \forall y_0 \quad C(0, 0, 1 + 2r) \cap R(x_0, y_0)$ の中には半径 r の円が含まれる.

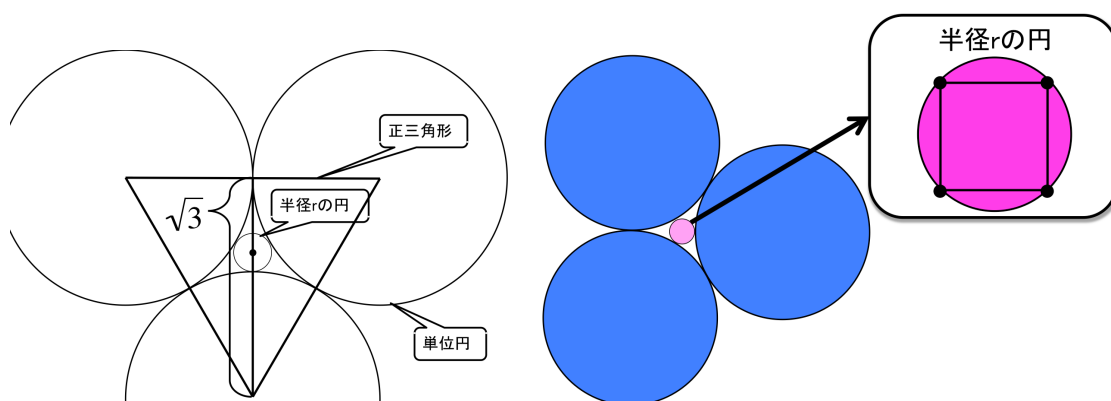


図 3.1: 半径 r の円を求める

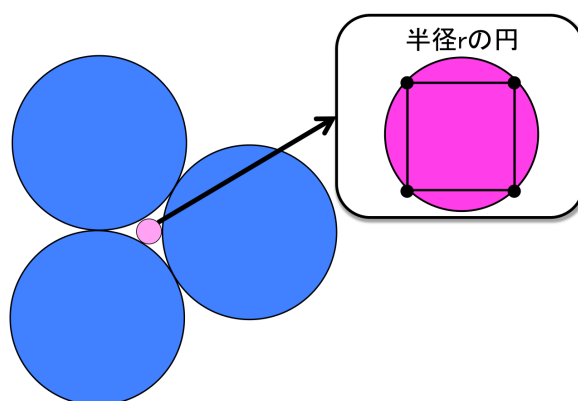


図 3.2: 半径 r の円の円周上に等間隔に点を置く

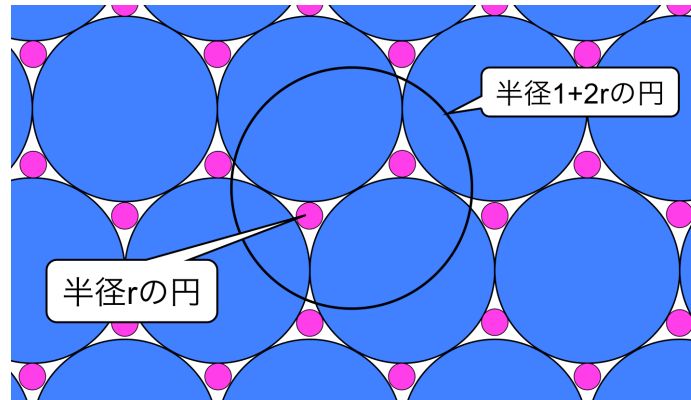


図 3.3: 単位円のシート $S(x, y)$ に半径 r の円を詰め込む

次に、この半径 r の円の円周上に等間隔に点を 4 点置き (図 3.2), できた正方形のサイズで正方格子を作り, 格子点上に点を配置する. すると半径 r の円を格子上的どこに置いても半径 r の円は必ず格子点を含む. つまり, 単位円のシートをこの格子の上に置くと, その隙間には必ず格子点が含まれる. よって単位円のシートで覆ったとき, 隙間に必ず点が含まれる点集合が求められた. 最初に平行移動のみ考えたが, 回転移動を行っても $C(0, 0, 1+2r)$ の中に半径 r の円は含まれるので, 結果は同じになる. $C(0, 0, 1+2r)$ の内部には必ず 1 個は半径 r の円が含まれるので, $C(0, 0, 1+2r)$ の内部にある点の数を数えることで 108 個という上界が得られる (図 3.4). $S(0, 0.1543)$ と $C(0, 0, 1+2r)$ を使い得られた点の配置を図 3.5 に示す.

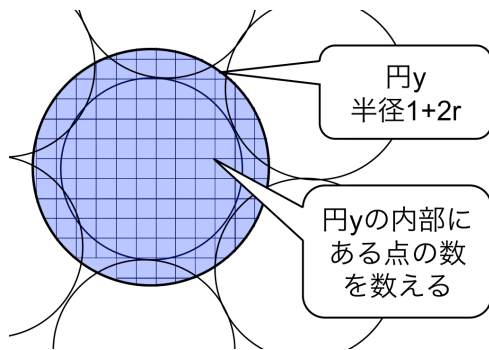


図 3.4: 上界を求める作図 3

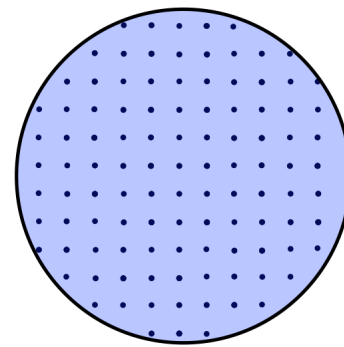


図 3.5: 108 個の上界の点の配置

以上のようにして単位円のシートで覆えない点の配置が求められた. 求められた点集合を P_U とすると, 以下の理由により求めた点集合 P_U はどのように単位円を配置しても覆えないことが証明できる.

補題 1. 互いに重なっていない単位円 C_1, C_2, C_3 があるとき, C_1, C_2, C_3 の中心を線分でつないだ三角形の内部には, C_1, C_2, C_3 と重ならない半径 r の円を必ず 1 個以上配置できる (図 3.6).

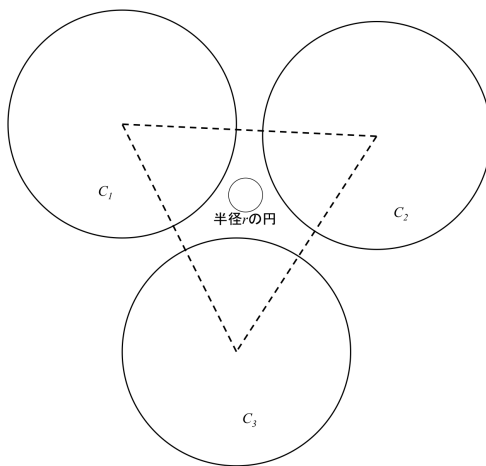


図 3.6: 補題 1.

定理 1. 点集合 P_U は, どのように単位円を配置してもすべての点が被覆されることは無い.

証明. まず, 得られた半径 $1 + 2r$ の円 y 上の点集合 P_U を単位円で覆えたと仮定する. 点集合 P_U を覆っている単位円集合を $U = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ とおく. ただし, $a_i (i = 1, \dots, p)$ は単位円で, P_U の点を少なくとも 1 つ被覆しているとする. 単位円集合 U の中から, どんな単位円 $a' \in U$ に対しても $|a \cap y| \geq |a' \cap y|$ を満たす単位円 a を選ぶ (図 3.7).

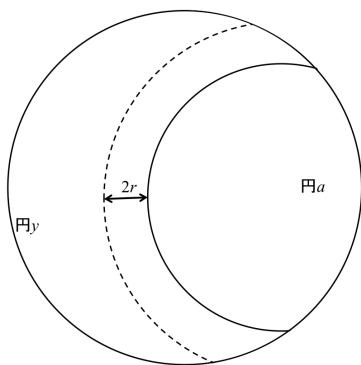


図 3.7: 半径 $1 + 2r$ の円 y と単位円 a

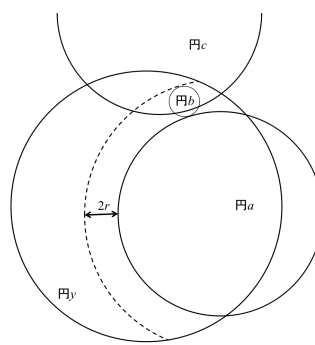


図 3.8: 円 b を覆う単位円 c

単位円 a の中心は円 y に含まれることに注意する. ここで, $y \setminus a$ に含まれており, かつ円 y と単位円 a に接する半径 r の円のうちの 1 つを円 b とする. 円 b の内部には点が必ず

あるので、 U の中には b 内の点すべてを覆う円 c が含まれている (図 3.8). また、円 a とぶつかってしまうため、 b の点を U 内の複数の単位円で覆うことはできない.

次に、半径 r の円 d を円 a, c に接するように置くと (図 3.9), 補題 1 より円 d は U 内の単位円では覆うことができない (図 3.10). 点集合 P_U の構成より、 d 内には必ず 1 つ以上の点があるので、これは矛盾である. よって、点集合 P_U は、どのように単位円を配置してもすべての点が覆われることは無い. $\square$

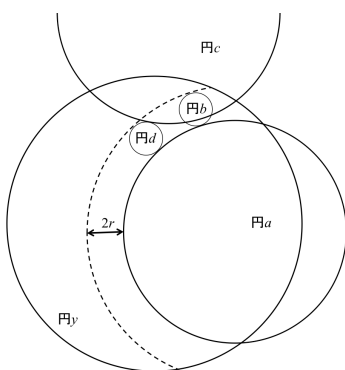


図 3.9: 半径 r の円 d を置く

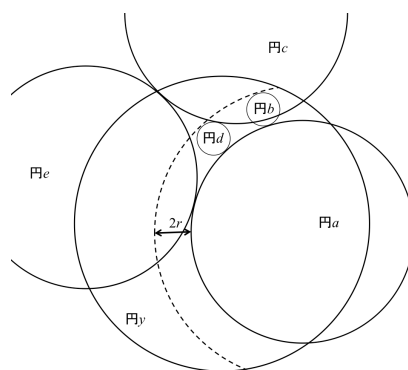


図 3.10: 単位円で覆えない半径 r の円 d

3.2 下界

稲葉による 10 個の下界が知られている [1]. [1] では、単位円と単位円のシートの間隙の面積の比率から下界を求めている. ここではその証明の概要を示す.

まず、平面上に配置された 10 個の点からなる集合 S を考える. その上に単位円のシートをランダムに被せたとする. このとき各点は、ある確率で単位円のシートに覆われる. そこで、 S の 10 個の点がすべて単位円に覆われる確率が正であることを示す.

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\} : \text{点集合}$$

$$A_i : x_i \text{ が単位円に覆われるという事象}$$

とすると、すべての点が覆われる確率は以下になる.

$$\begin{aligned} & P[A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{10}] \\ &= 1 - P[\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_{10}}] \\ &= 1 - P[\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \dots \vee \overline{A_{10}}] \\ &\geq 1 - P[\overline{A_1}] - [\overline{A_2}] - \dots - [\overline{A_{10}}] \end{aligned} \tag{3.1}$$

今点 x_i が単位円に覆われない確率 $P[\overline{A_i}]$ を考える．単位円のシート $S(x, y)$ から (x, y) を中心とする半径 R の円を切り取ったものを $S_R(x, y)$ とする．このとき， $S_R(x, y)$ の単位円の面積と隙間の面積の比率は式 3.2 で表すことができる．

$$\frac{|S_R(x, y)|}{|S_R(x, y) \cup \overline{S_R(x, y)}|} \quad (3.2)$$

明らかに，

$$P[\overline{A_i}] = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|S_R(x, y)|}{|S_R(x, y) \cup \overline{S_R(x, y)}|}$$

である．そこで， $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|S_R(x, y)|}{|S_R(x, y) \cup \overline{S_R(x, y)}|}$ の値を求めることを考える．ここで，単位円のシートの隣接する単位円の中心点を直線でつなぐと，平面を合同な正三角形の集合に分割できる (図 3.11)．正三角形の面積は $\frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ，正三角形の中の単位円のシートの隙間の部分の面積は，三角形の面積から単位円の面積の半分 $\frac{\pi}{2}$ をひいたものである．よって，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|S_R(x, y)|}{|S_R(x, y) \cup \overline{S_R(x, y)}|} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}} \doteq 0.093$$

であることが分かる．よって式 3.3 が求められる．

$$P[\overline{A_i}] = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}} \doteq 0.093 \quad (3.3)$$

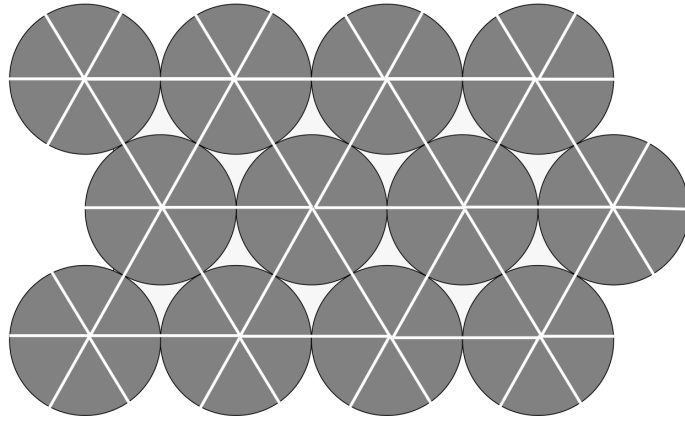


図 3.11: 下界を求める作図

式 3.3 を式 3.1 に代入すると， $P[A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{10}] > 0.07$ となり，すべての点が覆われる確率が正であることが分かる．ランダムに稠密な単位円を配置したときにすべての点

が覆われる確率が正になるので，10 点の点集合は重なりを持たない複数の単位円で必ず覆えることが証明された。

第4章 下界の改善

4.1 提案手法

k の下界を 11 個に改善するため、次の手法を用いた。平面上の 11 個の点からなる集合を $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{11}\}$ とする。 $p_i = (x_i, y_i)$ とする。 $p_2, \dots, p_{11}$ は任意の点、 p_1 は $p_1 \in S(x, y)$ を満たすある点だとする。そのとき、 $P \setminus \{p_1\}$ を被覆できる $S(x, y)$ が 1 つでもあることを示せば、 k の下界を 11 に改善できる。つまり任意の 11 点の点集合を考え、1 つの点が必ず単位円集合に覆われていると仮定したとき、必ず覆われている点以外の 10 点が、単位円のシートに覆われている場合があることを証明できればよい。単位円の配置には他の配置も考えられるが、この配置ですら覆えるということを示せば、他の配置について検討する必要はない。また $S(x, y)$ は平行移動についてのみ考える。以下に提案手法を説明する。

今、 $p_1 = (0, 0)$ としても一般性を失わない。

$$P(x, y) = \{(x', y') | (x', y') = (x_i - x, y_i - y) \wedge (x_i, y_i) \in P\}$$

とおく。明らかに

$$P \subset S(x, y) \Leftrightarrow P(x, y) \subset C(0, 0)$$

である。よって

$$\exists (x, y) \in C(0, 0) \text{ s.t. } P(x, y) \setminus \{(0, 0)\} \subset C(0, 0)$$

を示せばよい。

つまり、

$$\exists (x, y) \in C(0, 0) \text{ s.t. } \forall i \in \{2, 3, \dots, 11\} \quad (x_i - x, y_i - y) \in C(0, 0) \quad (4.1)$$

を示す。ここで、 $D(x, y)$ を用いると、

$$\text{式 4.1} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in C(0, 0) \text{ s.t. } \forall i \in \{2, 3, \dots, 11\} \quad (x, y) \in D(x_i, y_i)$$

と表せる。よって式 4.2 が空集合では無いということを示せば良い。

$$D(x_2, y_2) \cap D(x_3, y_3) \cap \dots \cap D(x_{11}, y_{11}) \quad (4.2)$$

4.2 計算機実験

4.2.1 手法1

式4.2が成り立つかどうかを, 任意の $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_{11}, y_{11}$ について解析的に調べるのは困難である. よって $n \times n$ のグリッド上で離散化して考える.

$$D'(s, t) = \{(s', t') | (s', t') \in \{0, 1, \dots, n-1\}^2 \wedge$$

$$\left(\frac{2}{n}s - 1\right) \leq \forall x < \left(\frac{2}{n}s\right), \left(1 - \frac{2(t-n+1)}{n}\right) \leq \forall y < \left(-\frac{2(t-n+1)}{n}\right)$$

$$s.t. \left(\left\lfloor \frac{x+1}{2}n \right\rfloor, (n-1) - \left\lfloor \frac{y+1}{2}n \right\rfloor\right) \in D(x_i, y_i)\}$$

と定義すると, $D'(s, t)$ は $D(x_i, y_i)$ のすべての点を含む最小の $n \times n$ のグリッド上の領域となる. よって $D'(s_2, t_2) \cap D'(s_3, t_3) \cap \dots \cap D'(s_{11}, t_{11})$ が空集合でない場合があるかどうかを確かめればよい.

具体的には, 単位円と単位円のシートを配列で表し, 単位円のシートから任意に $D'(s, t)$ を10枚抜き出し, 単位円の配列に重ねる. そして10枚の $D'(s, t)$ で単位円が覆われる場合があるかどうかを確かめる. n を1から大きくしていき, どのように重ねても覆えなくなれば, 下界が改善できたことになる. 以下にプログラムの概要を示す.

単位円は $n \times n$ に分割し, 単位円のシートは同じパターンがくり返されている範囲があれば良いので図4.1に示す $2n \times 2n$ の領域を用いる. それぞれ0/1配列により表現する. 単位円を表現する配列を配列 C , 単位円のシートを表す配列を配列 S とする. 以下にそれぞれの配列の作り方を示す.

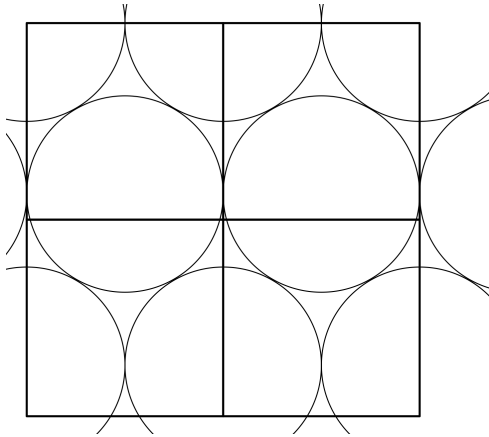


図 4.1: 配列 S で表す範囲

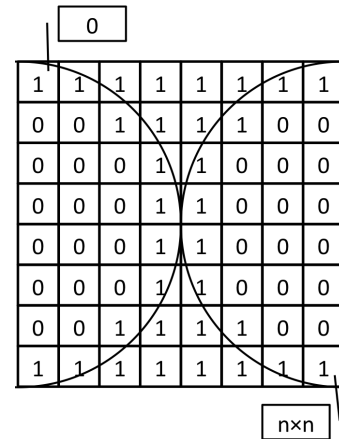


図 4.2: 半円2つで構成した配列 C

C は $n \times n$ の配列である。単位円の半円を中央で接するように配置し、単位円を表現する (図 4.2)。実際と比べたときに面積がなるべく小さくなるように分割数の $\frac{1}{2}$ だけずらすことで、単位円の接している部分を 1 列で表せるようにした (図 4.3)。例えば 8 分割の場合は、図 4.3 のように 0 と 1 が設定される。

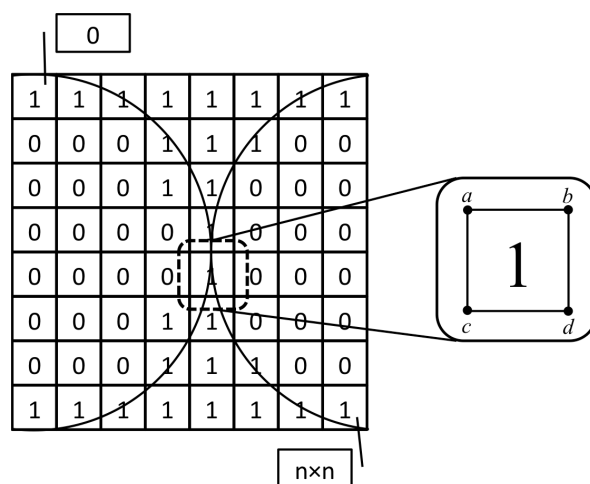


図 4.3: 中心をずらした配列 C

図 4.3 で示す周囲の点 a, b, c, d が 1 つでも円の外に出ていればその要素を 1 とする。周囲の格子点の 4 点すべてが単位円の式を満たすものを単位円とて 0 が代入される。これにより単位円を実際より小さく表現することになる。例として 16 分割としたとき、このアルゴリズムにより図 4.4 に示す配列が得られる。単位円を表す配列 C を作るアルゴリズムを Algorithm1 に示す。

次に、配列 C を作成する際と同じく、周囲の点 a, b, c, d が 1 つでも図 4.1 中の 8 つの単位円の外であれば 1 を代入する。それ以外には 0 を代入することで、 $\overline{S(x, y)}$ を 1 で表現した。周囲の格子点の 4 点すべてが単位円の中にあるものののみ 0 としたことで、単位円のシートの隙間 $\overline{S(x, y)}$ は実際より大きく表現される。このようにして求められた配列 S を図 4.5 に示す。単位円のシートの隙間を表す配列 S を作るアルゴリズムを Algorithm2 に示す。

このように作成した配列 C と配列 S を、ビット演算を用いて重ねていく。どちらの配列も要素は 0 か 1 なので、例えば n 桁の 2 進数の 00110110101101 は 10 進数の 3501 と変換できる。配列 C の $C[1] \sim C[n]$ までも n 桁の 2 進数として $circle[1]$ に代入する。 $C[n+1] \sim C[2n]$ までも n 桁の 2 進数として $circle[2]$ に代入する、としていく。また同様に配列 S の $S[1] \sim S[2n]$ までも $2n$ 桁の 2 進数として $sheet[1]$ に代入する。 $S[2n+1] \sim C[4n]$ までも $2n$ 桁の 2 進数として $sheet[2]$ に代入する、としていく。このアルゴリズムを Algorithm3 に示す。

```

1:  $n$  : 分割数
2:  $C[n \times n]$  : 単位円を入れる配列
3:  $i, j$  : ループ用変数
4:  $x1 \sim x4$  :  $x$  座標
5:  $y1 \sim y4$  :  $y$  座標
6:  $G$  : 分割数の逆数
7: for  $i, j = 0$  to  $n$  do
8:    $x1 = G \times i - \frac{G}{2}, y1 = G \times j - \frac{G}{2}$ 
9:    $x2 = G \times i - \frac{G}{2}, y2 = G \times (j + 1) - \frac{G}{2}$ 
10:   $x3 = G \times (i + 1) - \frac{G}{2}, y3 = G \times j - \frac{G}{2}$ 
11:   $x4 = G \times (i + 1) - \frac{G}{2}, y4 = G \times (j + 1) - \frac{G}{2}$ 
12:
13:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たすか then
14:     $C[j * n + i] = 0$ 
15:  end if
16:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たすか then
17:     $C[j * n + i] = 0$ 
18:  end if
19: end for

```

[illegible]

図 4.5: 単位円のシートを表した 01 配列 S

Algorithm 2 func2 : 単位円のシートを表す配列 S を作る

```
1:  $n$  : 分割数
2:  $C[n \times n]$  : 単位円を入れる配列
3:  $i, j$  : ループ用変数
4:  $x1 \sim x4$  :  $x$  座標
5:  $y1 \sim y4$  :  $y$  座標
6:  $G$  : 分割数の逆数
7: for  $i, j = 0$  to  $n$  do
8:    $x1 = G \times i - \frac{G}{2}, y1 = G \times j - \frac{G}{2}$ 
9:    $x2 = G \times i - \frac{G}{2}, y2 = G \times (j + 1) - \frac{G}{2}$ 
10:   $x3 = G \times (i + 1) - \frac{G}{2}, y3 = G \times j - \frac{G}{2}$ 
11:   $x4 = G \times (i + 1) - \frac{G}{2}, y4 = G \times (j + 1) - \frac{G}{2}$ 
12:
13:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $x^2 + y^2 \leq 1$  を満たす then
14:     $C[j * n + i] = 0$ 
15:  end if
16:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
17:     $C[j * n + i] = 0$ 
18:  end if
19:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
20:     $C[j * n + i] = 0$ 
21:  end if
22:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
23:     $C[j * n + i] = 0$ 
24:  end if
25:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
26:     $C[j * n + i] = 0$ 
27:  end if
28:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
29:     $C[j * n + i] = 0$ 
30:  end if
31:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
32:     $C[j * n + i] = 0$ 
33:  end if
34:  if  $(x1, y1) \sim (x4, y4)$  までが  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  を満たす then
35:     $C[j * n + i] = 0$ 
36:  end if
37: end for
```

Algorithm 3 bit : 配列 S と C を配列 $sheet[]$ と $circle[]$ に代入

```

1:  $n$  : 分割数
2:  $circle[n]$  : 単位円を表す非負の 32bit 変数の配列
3:  $sheet[n]$  : 単位円のシートを表す非負の 64bit 変数の配列
4:
5: for  $i = 0$  to  $n$  do
6:    $circle[i] = 0$ 
7:    $sheet[i] = 0$ 
8:   for  $j = 0$  to  $n$  do
9:      $circle[i] = circle[i] * 2 + C[i][j]$ 
10:     $sheet[i] = sheet[i] * 2 + S[i][j]$ 
11:   end for
12: end for

```

そして、配列 $circle$ に配列 $sheet$ から抜き出した任意の $D'(x, y)$ を 10 枚重ねていく。このプログラムのアルゴリズムを Algorithm4 に示す。

分割数を 6~10 と変化させ、実験した結果を表 4.1 に示す。

分割数	重ね合わせの総数	覆えたパターン数	実行時間 (sec)	覆えた割合 (%)
6	43758	41242	1	94.3
7	13123110	7697878	4	58.7
8	847660528	455529614	265	53.7
9	3390656312	1095181989	5580	32.3
10	396704524216	72413349736	183880	18.3

表 4.1: [手法 1] 分割数を変えた結果

10 分割までの計算機実験では、覆えるパターンが見つかった。しかし分割数 n が大きくなるにつれ、重ね合わせの総数に対する覆えるパターン数の割合が減少していつている。よってさらに細かく分割することで、覆うことのできるパターンの割合が減少していき 0 になる可能性がある。しかし、11 分割以上の場合の検証は計算時間が極端に増大してしまい困難であった。そこで、覆えた部分をさらに細かく分割するようにプログラムを改良した。これを手法 2 とし、分割数 n が 11 以上での結果を求めた。

4.2.2 手法 2

α 分割 ($\alpha = 6$ より始める) で手法 1 と同様に計算機実験を行い、覆えた場合、その部分の分割数を 2 倍にして分割し直し、覆えるかどうかを確認する、という手法に改善し

Algorithm 4 lower1 下界が 11 個に改善できるかどうかを検証する

```
1:  $n$  : 分割数
2:  $circle[]$  : 単位円を表す配列
3:  $sheet[]$  : 単位円のシートを表す配列
4:  $x, y$  : 重ねる位置の座標を示す
5:
6: for  $i = 0$  to  $n * n - 9$  do
7:    $x = i \% n$ 
8:    $y = i \div n$ 
9:   for  $l = 0$  to  $n$  do
10:     $circle[l] | sheet[y + l]$ 
11:   end for
12:   for  $j = 0$  to  $n * n - 8$  do
13:     $x = j \% n$ 
14:     $y = j \div n$ 
15:    for  $l = 0$  to  $n$  do
16:       $circle[l] | sheet[y + l]$ 
17:    end for
18:    •
19:    • (ループ用の変数を  $j, k, l, m, n, o, p, q, r$  と変えて 10 枚重ねる)
20:    •
21:    for  $r = 0$  to  $n * n$  do
22:       $x = r \% n$ 
23:       $y = r \div n$ 
24:      for  $l = 0$  to  $n$  do
25:         $circle[l] | sheet[y + l]$ 
26:        if  $circle[]$  が覆われた then
27:          終了
28:        end if
29:      end for
30:    end for
31:  end for
32: end for
```

た．16 分割まで計算機実験を行ったが，結果はすべて覆えてしまうパターンが見つかった．以下に 16 分割で覆えたパターンを示す．

18 分割以上では，手法 2 を用いても計算時間が増大してしまい，結果を出すことができなかった．よって下界については，本研究で提案する手法では改善できなかった．

第5章 上界の改善

既存の手法では正方格子を用いて上界を求めているが、同じく平面を覆い尽くすことのできる三角格子，六角格子に変えた場合の上界も求めた．さらに，正方格子については，格子のサイズを大きくすることにより改善が行えないか検証した．また，格子に基づかない点集合をつくり，単一の格子では到達できない上界を求めることができるのではないかと考察を行った．

5.1 格子に基づく改善

5.1.1 正方格子の改善

[2] で正方形で上界を求めることができたのは，どのように単位円のシートを動かしても，隙間の中に必ずこの正方格子の格子点が1点以上入るからである．ここで，三角格子や六角格子は，すべての頂点が周囲の単位円に同時に内接する場合があるが，正方格子を作成した正方形は，どのように回転させてもすべての頂点が同時に周囲の単位円に接することはないことが分かる (図 5.1)．すべての頂点が同時に周囲の単位円に接していなければ，回転させても必ず1つの頂点は隙間の中にある．

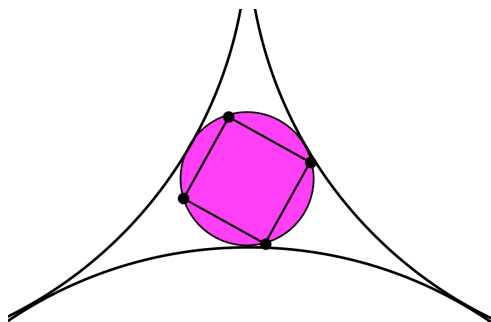


図 5.1: 周囲に内接しない正方形

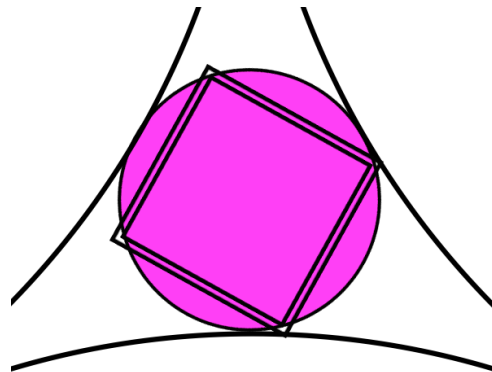


図 5.2: 大きくできる正方形

つまり，正方形を回転させ，すべての頂点が周囲の単位円に同時に内接するまでなら，正方形を大きくすることができる (図 5.2)．正方形の中心をずらして考えると複雑になる

ため，中心軸を固定し少しずつ角度を変え，すべての頂点が周囲の単位円に同時に内接するまでの範囲で正方形を大きくしていき，それらの内接する正方形の中で最も小さいものを求めた．結果は一辺が0.2278の正方形に拡大することができた．上原・浅野が用いた正方格子の一辺は0.2188だったので，正方形のサイズを約4.1%大きくすることができた．この正方形で正方格子を作り上界を求めると102個となり，正方格子を基にした上界が改善された．図5.3に改善された点の配置を示す．

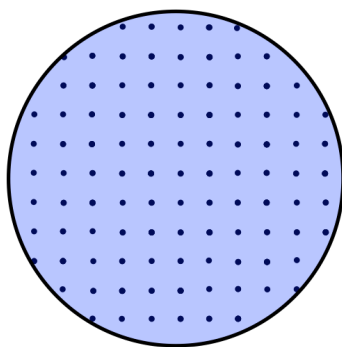


図 5.3: 改善された正方格子により示された 102 個の上界の点の配置

5.1.2 三角格子

正方格子を作成した半径 r の円で，均等に 3 点を取りそれぞれを線分でつなぐと一辺が $\sqrt{3}r$ の正三角形ができる．これをもとに三角格子を作成した (図 5.4)．これを基にして，82 個という上界が得られた．図 5.5 に点の配置を示す．

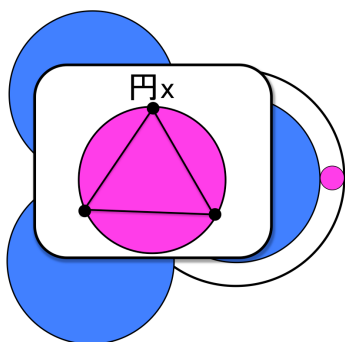


図 5.4: 三角格子の求め方

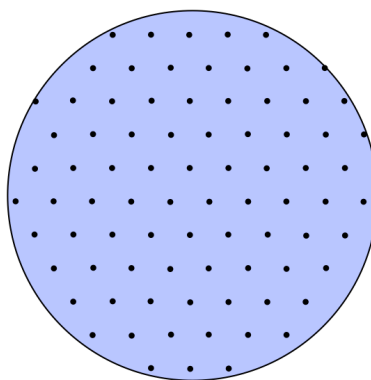


図 5.5: 三角格子により求められた 82 個の上界の点の配置

5.1.3 六角格子

単位円のシートの隙間にできる半径 r の円の半径を広げた円 C を考えると，周囲の単位円と交差する点が6点できる (図 5.6). この6点の距離がすべて等距離になるような円を求めると半径が $\frac{3-\sqrt{6}}{3} = r_s$ の円となる．できた6点を直線でつなぐと1辺が r_s の正六角形ができる．半径 r の円は，必ず半径 $1+2r$ の円の中に1つ以上含まれる．正六角形を構成する6点は，単位円のシートをどのように動かしても単位円のシートの隙間に必ず含まれる．よって，この正六角形で六角格子を作り格子点上に点を置くと，どのように単位円のシートを動かしても必ず1つ以上の点が単位円のシートの隙間に含まれる．よってこの六角格子を基に上界を求めると，119個という結果が得られた．

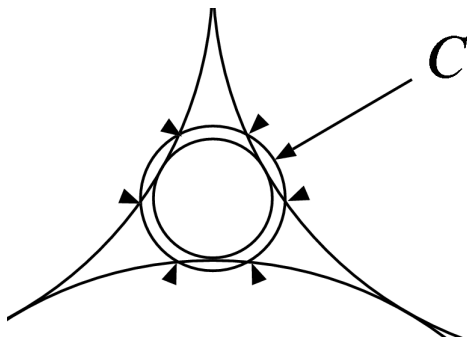


図 5.6: 六角格子

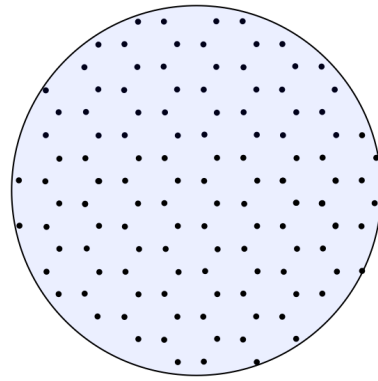


図 5.7: 六角格子により求められた 119 個の上界の点の配置

以上のように，正方格子・改善された正方格子・三角格子・六角格子を基に求められた上界を表 5.1 に示す．

格子の種類	求められる上界
正方格子	108
改善した正方格子	102
三角格子	82
六角格子	119

表 5.1: 各格子により求められた上界

5.2 格子に基づかない上界

ここでは、格子に基づかない手法により上界を求める。まず最初に空円を定義する。本手法での与えられた点集合 Q に対する空円とは、 $1+r$ の円の内部に中心を持ち、内部に Q の点を含まず、点集合 Q 中の 3 点で決定される円もしくは Q 内の 2 点と半径 $1+2r$ の円の円周上のある 1 点で決定される円である。

格子に基づく上界を求める際に用いた半径 r の円と半径 $1+2r$ の円を利用する。半径 $1+2r$ の円の中に a 個の点からなる点集合 Q があつたとする。そのとき Q が半径 r 以上の空円を持たなかったとする (図 5.8)。すると半径 $1+2r$ の円の中に半径 r の円を、全体が完全に含まれるように置くと、どのように置いても半径 r の円は必ず Q の点を 1 個以上含む。すなわち単位円のシートで覆うことができない点の配置が求められたことになる。

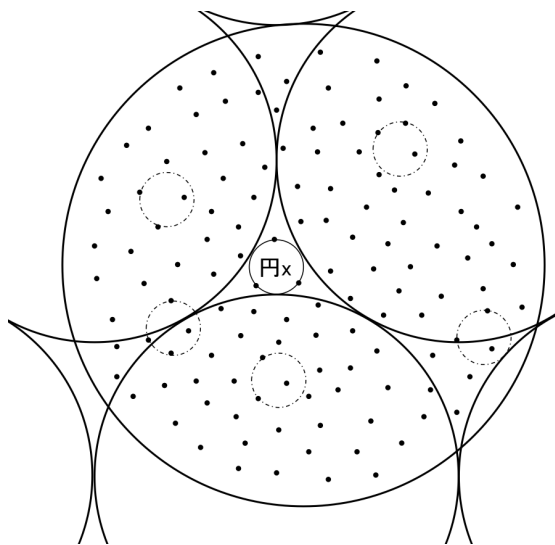


図 5.8: 半径 r の円より大きな円が入る隙間が無い点集合を持った半径 $1+2r$ の円

そこで、ある a 個の点からなる点集合 Q に対する最大の空円の半径を求め、 r より大きい場合は、その空円を構成する点を動かし半径を小さくする。これを繰り返すことで、点集合 Q 上の最大の空円の半径が r 以下となる配置を作ることができるかどうかを求める。最大の空円の半径が r 以下となる配置を作ることができたら、 Q より点の数を 1 つずつ減らしていく。最終的に、どれだけ少ない点数の点集合でそのような配置を作ることができるかを、計算機実験により確認する。

5.2.1 計算機実験 1

半径 $1+2r$ の円の内部に置いた n 点の点集合 Q 上に置くことのできる、最大の空円の半径を r 以下にできるかどうかを確認するプログラムを作成した。まず図 5.9 に示すよう

な2点と半径 $1+2r$ の円の円周上の1点で構成される空円は、24個の点集合 $Q' \in Q$ を置き固定した。

半径 $1+2r$ の円と同じ中心座標で、半径 $1+r$ の円 y' を考える。円 y' の円周上に点同士の間隔が $2r$ 以下になるように点を並べると、点集合 P' の任意の2点と半径 $1+2r$ の円の円周上の1点で構成される空円は、半径が r 以下になる。円 y' の円周の長さは $2 \times (1+r)\pi$ なので、 $2 \times (1+r)\pi \div 2r = 23.449\dots$ となり、24点以上置けば各点の間隔が $2r$ 以下となる(図5.10)。

残りの $n-24$ 点は円 y' の中に置き、点集合 Q の任意の3点により構成される円が空円であれば半径を求め、 r 以上であればその空円を構成する3点をその空円の中心に近づける。しかし、空円を構成する点が Q' に含まれる場合は動かさない。点集合 Q のすべての3点について空円を求め、点を動かし終わったら、点集合 Q の中の最大の空円の大きさを求める。これが r 以下であれば、再び同じ処理を繰り返す。このプログラムのアルゴリズムの概要を Algorithm5 に示す。

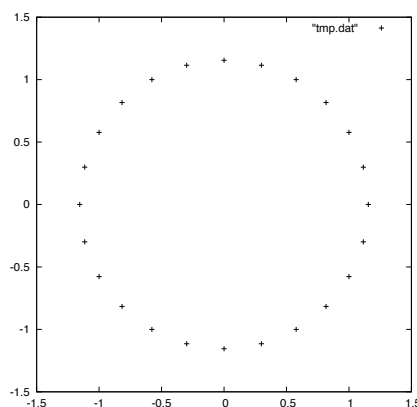
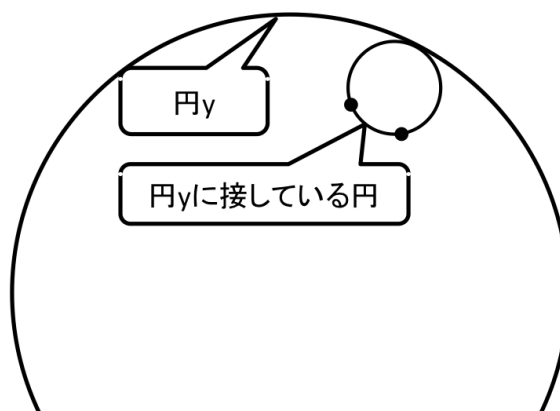


図 5.9: 2点と円周上のある1点でできる円 図 5.10: 円 y' の円周上に配置した24点

点集合 P の点数を、三角格子により求められた上界である82点として実験したが、最大の空円の半径を r 以下にすることはできなかった。周囲に配置する24点は動かさなかったため、その24点に関しては自由度が全くないためだと思われる。そこで、実験2を提案した。

5.2.2 計算機実験2

実験1と同じ手法だが、点集合 Q の任意の2点と半径 $1+2r$ の円の円周上のある1点で構成される円 k の半径を解析的に求め、空円であれば半径が r 以下になるように、2点をその空円の中心に近づける。こうすることで、全ての点を動かすことができるので、実験1より点の配置の自由度が増すのでは無いかと考えられる。そこで、点集合の任意の2

Algorithm 5 upper2 n 点の点集合が上界になるか検証するプログラム [実験 2]

```
1:  $n$  : 検証する点数の設定
2:  $x[n]$  : 各点の  $x$  座標を入れる配列
3:  $y[n]$  : 各点の  $y$  座標を入れる配列
4:  $i, j, k$  : 点のインデックス
5:  $r$  : 空円の半径
6:  $r_{max}$  : 最大空円の半径
7:  $DELTA$  : 空円を構成する 3 点を近づけるときのパラメータ
8:  $N$  : 試行回数
9:
10: 配列  $x[0] \sim x[n-24], y[0] \sim y[n-24]$  にランダムに半径  $1+2r$  の半径  $1+2r$  の円の中
    の座標を設定
11: 配列  $x[n-24] \sim x[n], y[n-24] \sim y[n]$  は中心からの距離が  $1+r$  の点の座標を設定
12: while 最大空円の半径  $r_{max}$  が 0.1547 以下になるまで do
13:    $N++$ 
14:    $DELTA = 1(\div \log(1000 + N))$ 
15:   for  $i, j, k = 0$  to  $n$  do
16:     if  $i, j, k$  の 3 点で構成される円 == 空円 then
17:       半径  $r$  を計算する
18:       if  $0.1547 < r$  then
19:         空円を構成する  $i, j, k$  の 3 点をその空円の中心に向かって  $r \times DELTA$  だけ近
            づける
20:       end if
21:     end if
22:   end for
23:
24:   for  $i, j, k = 0$  to  $n$  do
25:     if  $i, j, k$  の 3 点で構成される円 == 空円 then
26:       半径  $r$  を計算する
27:       if  $r > r_{max}$  then
28:          $r_{max} \leftarrow r$ 
29:       end if
30:     end if
31:   end for
32: end while
```

点と半径 $1 + 2r$ の円の円周上のある 1 点 (接点) で構成される円の半径を求めるため、以下のように解析を行った.

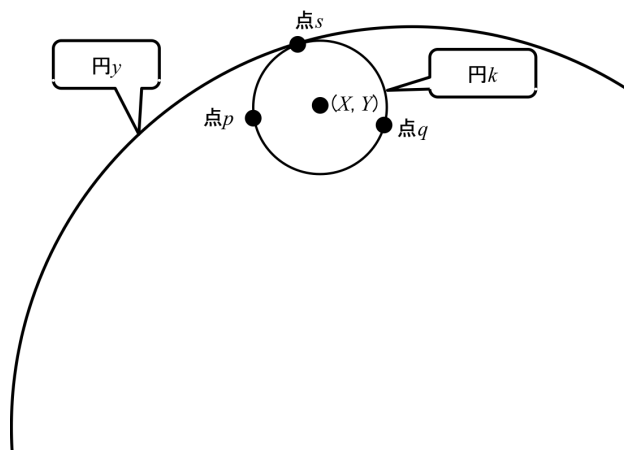


図 5.11: 2 点と円周上のある 1 点でできる円 k

任意の 2 点を点 p と点 q し, それぞれの座標を (x_p, y_p) , (x_q, y_q) とすると, この 2 点と半径 $1 + 2r$ の円の円周上のある点 s を接点とする円が 2 つ求められるので, 半径の小さい方を求める円 k とする. ある点 s の座標を (x_s, y_s) , 円 k の中心の座標を (X, Y) とする (図 5.11). すると円 k の中心は直線 pq の垂直二等分線 L 上にあり, L の方程式に円 k の座標を代入すると式 5.1 となる (図 5.12).

$$Y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} X - \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2(y_2 - y_1)} \quad (5.1)$$

次に, 半径 $1 + 2r$ の円の中心, 円 k の中心, 点 s を通る直線を M とすると直線 M は式 5.2 で表される (図 5.13). また, $R = 1 + 2r$ とすると半径 $1 + 2r$ の円は式 5.3 で表される.

$$y = \frac{Y}{X} x \quad (5.2)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (5.3)$$

すると, 式 5.2 と式 5.3 より点 s の座標が求められる (式 5.4).

$$\begin{aligned} x_s &= \pm R \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ y_s &= \pm R \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

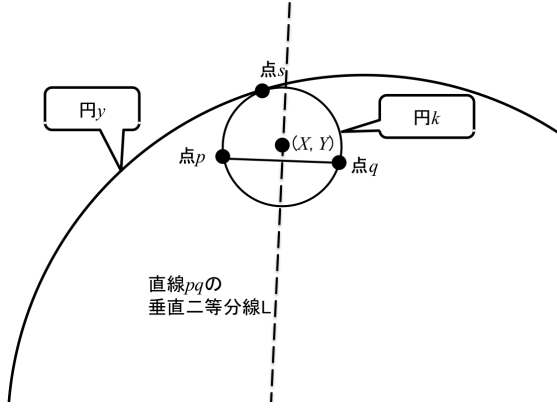


図 5.12: 直線 pq の垂直二等分線

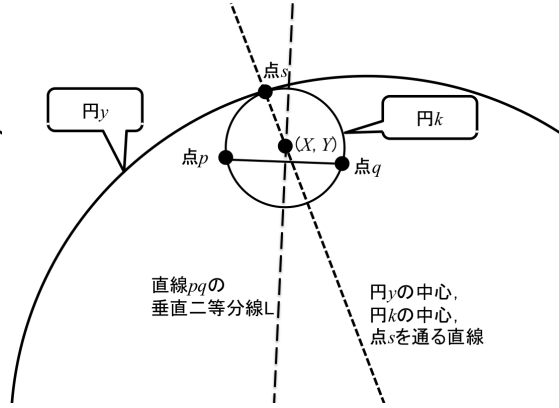


図 5.13: 直線 M

円 k の中心と点 p , 点 s との各距離は等しく, 式 5.4 を代入すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 (X - x_p)^2 + (Y - y_p)^2 &= (X - x_s)^2 + (Y - y_s)^2 \\
 -2x_p X + x_p^2 - 2y_p Y + y_p^2 &= \pm 2R \frac{X^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \pm 2R \frac{Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\
 &\quad + R^2 \frac{X^2}{X^2 + Y^2} + R^2 \frac{Y^2}{X^2 + Y^2}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで, 式 5.5 の右辺を $X = r \cos \phi$, $Y = r \sin \phi$ と置き換えると,

$$\begin{aligned}
 &\pm 2R \left(\frac{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}} \right) + R^2 \left(\frac{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}} \right) \\
 &= \pm 2R (r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi) + R^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\
 &= \pm 2Rr + R^2
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

となり, 式 5.5, 式 5.7, $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$, さらに式 5.1 を $Y = aX + b$ としたものから

$$\begin{aligned}
 -2x_p X + x_p^2 - 2y_p Y + y_p^2 &= \pm 2Rr + R^2 \\
 \pm 2R\sqrt{X^2 + Y^2} &= R^2 + 2x_p X + 2y_p Y + x_p^2 + y_p^2 \\
 4R^2(X^2 + Y^2) &= (R^2 + 2x_p X + 2y_p Y + x_p^2 + y_p^2)^2 \\
 4R^2(X^2 + (aX + b)^2) &= (R^2 + 2x_p X + 2y_p(aX + b) + x_p^2 + y_p^2)^2
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

となり, 以下の式が導かれる.

$$\begin{aligned}
 &4(R^2(1 + a) - (x_p + y_p a)^2)X^2 \\
 &+ 4(R^2 2ab - (x_p + y_p a)(R^2 + 2y_p b - x_p^2 - y_p^2))X \\
 &+ 4R^2 b^2 - (R^2 + 2y_p b - x_p^2 - y_p^2)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

式 5.9 より，円 k の中心座標 (X, Y) が求まり，そこから半径 r_k が求まる．

以上の手法を用いたプログラムのアルゴリズムを Algorithm6 に示す．

この手法を用いた結果，上界を 79 個に改善することができた．図 5.14 に結果を示す．
図 5.14 の周囲の円は半径 $1 + 2r$ の円を表している．

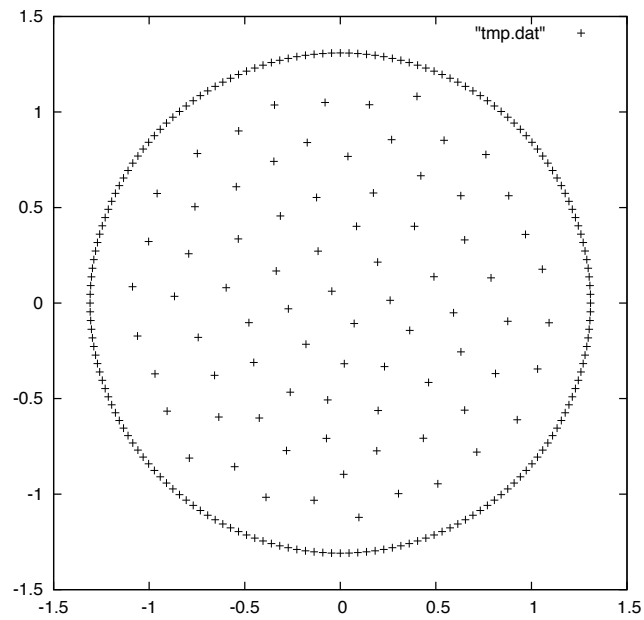


図 5.14: [手法 3] 上界 79 個

Algorithm 6 upper3 n 点の点集合が上界になるか検証するプログラム [実験 3]

```
1:  $n$  : 検証する点数の設定
2:  $x[n]$  : 各点の  $x$  座標を入れる配列
3:  $y[n]$  : 各点の  $y$  座標を入れる配列
4:  $i, j, k$  : 点のインデックス
5:  $r$  : 空円の半径
6:  $r_{max}$  : 最大空円の半径
7:  $DELTA$  : 空円を構成する 3 点を近づけるときのパラメータ
8:  $N$  : 試行回数
9:
10: 配列  $x[n], y[n]$  にランダムに半径  $1 + 2r$  の半径  $1 + 2r$  の円の中の座標を設定
11: while 最大空円の半径  $r_{max}$  が 0.1547 以下になるまで do
12:    $N++$ 
13:    $DELTA = 1(\div \log(10000 + N))$ 
14:   for  $i, j, k = 0$  to  $n$  do
15:     if  $i, j$  と円周上の 1 点で構成される円==空円 then
16:       半径  $r$  を計算する
17:       if  $0.1547 < r$  then
18:         空円を構成する  $i, j$  の 2 点をその空円の中心に向かって  $r \times DELTA$  だけ近づける
19:       end if
20:     end if
21:     if  $i, j, k$  の 3 点で構成される円==空円 then
22:       半径  $r$  を計算する
23:       if  $0.1547 < r$  then
24:         空円を構成する  $i, j, k$  の 3 点をその空円の中心に向かって  $r \times DELTA$  だけ近づける
25:       end if
26:     end if
27:   end for
28:
29:   for  $i, j, k = 0$  to  $n$  do
30:      $l15 \sim l22$  までの様に 2 通りの方法で求められた空円から最大空円を求める
31:   end for
32: end while
```

5.3 さらに改善

格子に基づく上界では、半径 $1 + 2r$ の円の内部の点集合の数を数えて上界を求めている。その半径 $1 + 2r$ の円 y の上下を切り取った図 5.15 に示す形 y' を考える。そのとき y' に単位円のシートを被せると単位円のシートをどのように動かしても半径 r の円が 1 個必ず入る。 y' の中に完全に含まれるように半径 r の円を y' 上に置いたとき、半径 r の円の内部に必ず 1 個以上点を含むような点集合を $P'_{y'}$ とすると以下の定理が成り立つ。

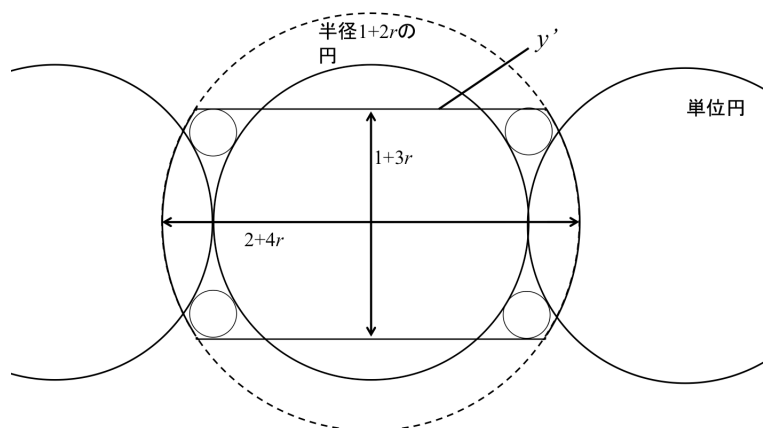


図 5.15: 半径 $1 + 2r$ の円の上下を切り取った形 y'

定理 2. 点集合 P'_H は, どのように単位円を配置してもすべての点が被覆されることは無い.

証明. まず, 得られた y' 上の点集合 P'_U を単位円 D で覆えたと仮定する. 点集合 P'_U を覆っている単位円集合を $U' = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ とおく. ただし, $a_i (i = 1, \dots, p)$ は単位円 D で, P'_U の点を少なくとも 1 つ被覆しているとする. 単位円集合 U' の中から, どんな $a' \in A$ に対しても $|a \cap y'| \geq |a' \cap y'|$ を満たす a を 1 つ選ぶ (図 5.16).

単位円 a の中心は y' に含まれることに注意する. ここで, $y' \setminus a$ に含まれており, かつ y' と単位円 a に接する半径 r の円のうちの 1 つを円 b とする. 点集合 P'_U の構成より, 円 b の内部には点が必ずあるので, U に中には b 内の点すべてを覆う円 c が含まれている (図 5.17). また, 円 a とぶつかってしまうため, b 内の点を U 内の複数の円で覆うことはできない.

次に，半径 r の円 d を円 a, c に接するように置くと (図 5.18)，補題 1 より円 d は U 内の単位円では覆うことができない (図 5.19)．点集合 P_U' の構成より， d 内には必ず 1 つ以上の点があるので，これは矛盾である．よって， y' 上の点集合 P_U' は，どのように単位円を配置してもすべての点が被覆されることは無い． $\square$

ここでは点集合 $P'_U = P_U \cap y'$ として求めた. 点集合 P_U は y' に完全に含まれるように半径 r を y' に置いた場合でも, 必ず半径 r の円の中に点を 1 つ以上含む.

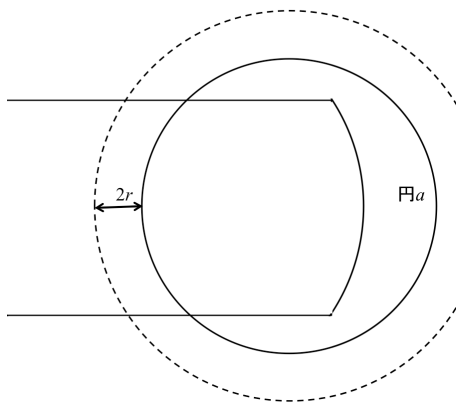


図 5.16: 形 y' と単位円 a

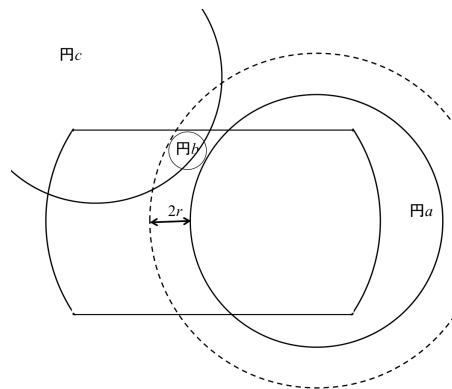


図 5.17: 円 b を覆う単位円 c

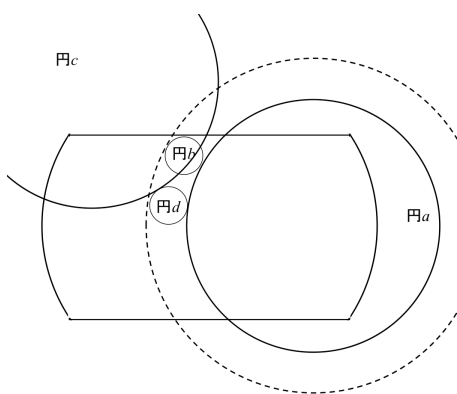


図 5.18: 半径 r の円 d を置く

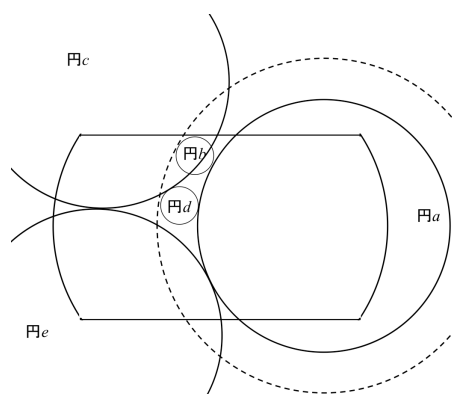


図 5.19: 単位円で覆えない半径 r の円 d

各格子を用いて求められた P_U より P'_U を求め、さらに改善された上界を求めた結果を表 5.2 に示す。また三角格子により求められた 54 個の結果を図 5.20 に示す。

格子の種類	求められる上界
正方格子	75
改善した正方格子	73
三角格子	54
六角格子	78

表 5.2: 各格子により求められた上界

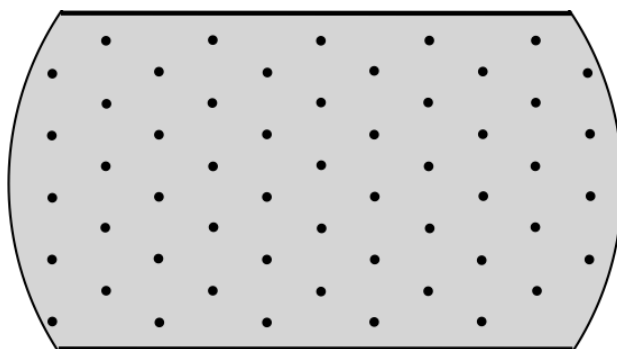


図 5.20: 上界 54 個

第6章 まとめ

本論文では，複数の単位円による点集合の排他的被覆問題において，どんな配置でもすべての点を必ず覆うことができる点の個数 k の上界と下界の改善ができないか計算機実験と考察を行った．

下界については，本論文で提案する手法では改善できなかった．しかし，下界改善のため手法は，全探索を行い計算量がとても多い．よってより高速な処理が可能のように改善すること．全く別の新しい手法を用いることで下界を改善できないかを検討することが今後の課題として挙げられる．

上界については計算機実験により 54 個に改善することができた．今後は，別の手法を用いて，上界の改善を行えないか考察していくことが課題としてあげられる．

謝辞

研究にあたり，数々のご助言を頂いた上原隆平准教授に深く感謝致します．また，学生生活を含め様々な面でサポートして頂いた浅野哲夫教授，岡本吉央特任准教授，清見礼助教に厚く御礼申し上げます．

参考文献

- [1] 稲葉 直樹, “10 個の点”, http://puz.hp.infoseek.co.jp/hirameki/suuri_4.html, 2009.
- [2] 上原 隆平, 私信, 2010.
- [3] 斉藤 浩, “確率パズルにだまされるな! (その 3)”, 理系への数学, 現代数学社, 2011;44(2):11.
- [4] Veit Elser, “Packing-constrained point coverings”, manuscript, 2011.