

Title	様相論理における不完全性への代数的アプローチ
Author(s)	Tadeusz, Litak
Citation	
Issue Date	2005-09
Type	Thesis or Dissertation
Text version	author
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10119/977">http://hdl.handle.net/10119/977</a>
Rights	
Description	Supervisor:小野 寛晰, 情報科学研究科, 博士

# 様相論理における不完全性への代数的アプローチ

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科  
リタク タデウシュ

July 8, 2005

## 論文の内容の要旨

本論文では、様相論理の意味論に現れる不完全性について論ずる。クリプキ意味論の不完全性についてはすでに多くの議論がなされてきたが、ここでは、代数的な立場に立って、クリプキ意味論に関する完全性より弱いいくつかの完全性の概念を導入し、これらの間の関係を明らかにすることを目標とする。ここで導入されるのは、原子的代数 ( $\mathcal{A}$ -BAOs)、完備加法的代数 ( $\mathcal{V}$ -BAOs)、剰余を持つ代数 ( $\mathcal{T}$ -BAOs)、完備代数 ( $\mathcal{C}$ -BAOs)、オメガ完備代数 ( $\omega\mathcal{C}$ -BAOs) およびこれらの条件の組み合わせにより得られる代数の全体のクラスによる完全性である。ただしここで「代数」というのはいくつかの演算を付加したブール代数を指す。上記の条件の組み合わせにより得られる代数のうちには、原子的かつ完備加法的な代数  $\mathcal{AV}$ -BAOs や、完備かつ原子的な代数  $\mathcal{CA}$ -BAOs などが含まれるが、このうち後者は、近傍フレーム (neighbourhood frames) の双対な代数になっている。また  $\mathcal{CAV}$ -BAOs がちょうどクリプキ・フレームの双対な代数である。したがって、このような枠組みの中で、様相論理のクリプキ・フレームや近傍フレームなどに関する完全性を広い見地から議論することが可能になる。

本論文で示した最も重要な結果は以下の通りである。まず、このように導入された完全性の概念がすべて互いに異なることを示した。そして、W. Blok が不完全性の度合いに関して得た結果 (Blok alternatives) をこれらのほとんどのクラスに対して拡張できることの証明をあたえた。つぎに、これらの完全性は多くの場合、「あたえられた様相論理のある種の拡張 (ハイブリッド拡大、時相拡大、無限拡大など) に関する最小拡大がもとの様相論理の保存拡大になる」という形の条件により特徴づけられることを示した。また、クリプキ・フレームの持つ2階論理的特性は、それに双対な代数の束完備性に起因することを指摘した。さらに、コンパクト性を持たない例としてよく知られている Löb 論理が強オメガ完備でないことを明らかにした。この結果は、この論理の特異性を一層よく物語っている。

これらの完全性の概念のうち、もっともよい振る舞いを示す  $\mathcal{AV}$ -完全性について、詳細な研究をおこなった。まずこの完全性は、最小ハイブリッド拡大の保存性として、または離散フレームに関する完全性としても特徴づけ可能であることを明らかにした。ここで離散フレームとは  $\mathcal{AV}$ -BAOs の双対である。つぎに、 $\mathcal{AV}$ -完全性においては弱完全性と強大域的完全性が同値であることを示した。さらに、離散フレームの様相的定義可能なクラスの特徴づけをあたえたが、この結果はクリプキ・フレームでの対応する結果としてよく知られている Goldblatt-Thomason の定理を強めたものになっている。これらの  $\mathcal{AV}$ -完全性に対する肯定的結果は、他の完全性の概念に対して知られている否定的結果と著しい対照をなしている。

論文の最後では、線形時間論理全体のなす束についての研究をおこなった。これらの論理はすべて  $\mathcal{AV}$ -完全であるという点が特徴的であり、またそのために多くの肯定的結果が得られた。そ

のうちでとくに興味深いのは、これらの論理のうち有限公理化可能なものに対する充足可能性問題はすべて NP 完全である、という結果である。

以上の結果のうち離散フレームに関する結果は Balder ten Cate と、また線形時間論理に関する結果は Frank Wolter との共同研究の成果である。